

## 4. チェイン・ルール

### 4.1 行列とベクトルの演算

2変数, 3変数の関数を扱う際に必要なベクトル・行列<sup>1)</sup>の演算をまとめておく. ここでは数(スカラー)は実数とする.

数を  $n$  個横に並べたものを  $n$  次行ベクトル, 縦に並べたものを  $n$  次列ベクトルという<sup>2)</sup>. たとえば

$$(1, 2), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (1, 2, 3), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

はそれぞれ 2 次行ベクトル, 2 次列ベクトル, 3 次行ベクトル, 3 次列ベクトルである. この講義では, ベクトルを通常列ベクトルの形に表し, 一つの文字で表すときは, ローマ文字の太字を用いる:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = {}^t(x_1, x_2), \quad {}^t\mathbf{x} = (x_1, x_2).$$

ここで  ${}^t(*)$  は, 行(列)ベクトルの各成分を縦(横)に並べ直す操作(転置)を表す<sup>3)</sup>. 一方, 第 3 回の (3.6) のように全微分は行ベクトルを用いて表す. 行ベクトルと列ベクトルの積を次のように定める(順番に注意):

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2, \quad (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

高等学校で学んだベクトルの内積は  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}$  と表すことができる.

数を  $2 \times 2$  ( $3 \times 3$ ) の正方形にならべたものを 2 次 (3 次) 正方行列という<sup>4)</sup>. 以下簡単のために次数を 2 に限るが, 3 次の場合も想像してほしい.

<sup>\*)</sup>2024 年 7 月 2 日/4 日 (2024 年 7 月 1 日訂正)

<sup>1)</sup>ベクトル: a vector, 英語の発音から“ヴェクタ”と読むべき気がする. 行列: a matrix, matrices. 行列の一般論や詳細は「線形代数学第一」で扱った.

<sup>2)</sup>スカラー: a scalar; 行ベクトル: a row vector; 列ベクトル: a column vector.

<sup>3)</sup>転置: transposition.

<sup>4)</sup>正方行列: a square matrix.

ここでは, 正方行列を表すのにローマ文字の大文字を用いる. 行列  $A$  を

$$(4.1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \quad \left( \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right) \\ = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \left( \begin{matrix} \alpha_1 = (a_{11}, a_{12}) \\ \alpha_2 = (a_{21}, a_{22}) \end{matrix} \right)$$

と書くとき, 第一行の右辺の式を行列  $A$  の列ベクトルへの分解, 第二行の式を行ベクトルへの分解という.

正方行列  $A$  を (4.1) のように表すとき, これに列ベクトル  $\mathbf{x}$ , 行ベクトル  $\xi$  を掛ける演算を次のように定義する:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1\mathbf{x} \\ \alpha_2\mathbf{x} \end{pmatrix}, \quad \xi\mathbf{A} = (\xi\mathbf{a}_1, \xi\mathbf{a}_2).$$

これを用いて正方行列  $A$  と  $B$  の積を次のように定める:

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha_1\mathbf{b}_1 & \alpha_1\mathbf{b}_2 \\ \alpha_2\mathbf{b}_1 & \alpha_2\mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \quad \left( \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \right).$$

正方行列と列ベクトルの積は列ベクトル, 行ベクトルと正方行列の積は行ベクトル, 正方行列と正方行列の積は正方行列である.

2 次正方行列  $A$  に対して

$$(4.2) \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E} \quad \left( \mathbf{E} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

をみたま 2 次正方行列  $\mathbf{A}^{-1}$  が存在するとき,  $\mathbf{A}$  は正則行列であるといい,  $\mathbf{A}^{-1}$  を  $\mathbf{A}$  の逆行列という. ここで  $\mathbf{E}$  は 2 次の単位行列といい, 次の性質を満たす<sup>5)</sup>: 任意の 2 次列ベクトル  $\mathbf{x}$ , 2 次行ベクトル  $\xi$ , 2 次正方行列  $\mathbf{A}$  に対して

$$(4.3) \quad \mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \xi\mathbf{E} = \xi, \quad \mathbf{E}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{A}.$$

式 (4.1) の形の  $\mathbf{A}$  に対して

$$(4.4) \quad \det \mathbf{A} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

で定まるスカラー  $\det \mathbf{A}$  を  $\mathbf{A}$  の行列式とよぶ<sup>6)</sup>. 行列  $\mathbf{A}$  が正則であるための必要十分条件は  $\det \mathbf{A} \neq 0$  であり, このとき,  $\mathbf{A}^{-1}$  は次のように表される.

$$(4.5) \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

<sup>5)</sup>正則行列: a regular matrix; 逆行列: the inverse matrix; 単位行列: the identity matrix.

<sup>6)</sup>行列式: determinant.

## 4.2 方向微分

ここでは 2 変数関数  $f(x, y)$  を, ベクトル  $x = {}^t(x, y)$  に対して数  $f(x) = f(x, y)$  を対応させる規則だと見なす<sup>7)</sup>. 例 3.22 の (1) で挙げた, 点  $P = {}^t(a, b)$  を出発して一定の速度  $v = {}^t(v_1, v_2)$  で動く点の運動  $\gamma(t)$  を考えよう:

$$\gamma(t) = P + tv = {}^t(a + v_1t, b + v_2t).$$

定義 4.1. 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  で定義された関数  $f$  が, 点  $P = (a, b) \in D$  において  $v = {}^t(v_1, v_2)$  方向に方向微分可能であるとは, 1 変数関数

$$F(t) := f(a + v_1t, b + v_2t) = f(P + tv)$$

が  $t = 0$  で微分可能となることである. このとき, 微分係数  $F'(0)$  を  $f$  の  $P$  における  $v$  方向の方向微分といい<sup>8)</sup>, どんなベクトル  $v$  に対しても  $v$  方向に方向微分可能なとき,  $f$  は  $P$  で方向微分可能という.

命題 3.23 から次がわかる:

命題 4.2. 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上の関数  $f$  が  $P = (a, b) \in D$  で微分可能ならば  $f$  は  $P$  で方向微分可能である. とくに  $v$  方向の方向微分は次で与えられる:

$$(4.6) \quad (df)_{Pv} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)v_2 \quad \left(v = {}^t(v_1, v_2)\right).$$

勾配ベクトル 点  $P$  を含む領域で定義された微分可能な関数  $f$  に対して

$$\text{grad } f_P := \begin{pmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{pmatrix} = {}^t((df)_P)$$

で定まるベクトルを  $f$  の  $P$  における勾配ベクトルという<sup>9)</sup>. これを用いると, 方向微分 (4.6) は内積 “ $\cdot$ ” を用いて

$$(df)_{Pv} = (\text{grad } f_P) \cdot v$$

と表すことができる. 勾配ベクトル  $\text{grad } f_P$  が零ベクトルでないとき, このベクトルは  $P$  を通る  $f$  の等高線に垂直な方向を与えている (問題 4-4).

<sup>7)</sup> 関数の定義域の点の座標は行ベクトルで表したが, これからしばらくの間は列ベクトルで表すことにする.

<sup>8)</sup> 方向微分: the directional derivative.

<sup>9)</sup> 勾配ベクトル: the gradient vector.

## 4.3 合成関数の微分 (チェイン・ルール)

曲線に沿う微分の公式 (命題 3.23) と偏微分の意味から直ちに次のことがわかる:

定理 4.3 (チェイン・ルール<sup>10)</sup>). 2 変数関数  $f(x, y)$  と, 2 つの 2 変数関数

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

がともに微分可能であるとき<sup>11)</sup>, 2 変数関数

$$\tilde{f}(\xi, \eta) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$$

は微分可能で, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi}(\xi, \eta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi, \eta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi, \eta) \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta}(\xi, \eta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi, \eta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

注意 4.4. 物理学や工学では, 定理 4.3 の  $\tilde{f}(\xi, \eta)$  のことを  $f(x, y)$  と同じ  $f$  を用いて  $f(\xi, \eta)$  のように表すことがある. 文脈で独立変数がはっきりわかるのならこの記法が便利である. このとき (適当に省略して) 定理 4.3 の結論を

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

と表すことができる. さらに, 従属変数に名前をつけて

$$z = f(x, y) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \tilde{f}(\xi, \eta)$$

と表して次のように書くこともできる:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

$\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}^2$  への写像とその微分 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上で定義された写像  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2$  を考える. これは  $D$  の各点  $(\xi, \eta)$  に対して  $\mathbb{R}^2$  の要素  $F(\xi, \eta)$  を対応させる対応の規則である.  $F(\xi, \eta)$  は  $\mathbb{R}^2$  の要素だから, それを  $(x, y)$  と書けば, 各  $x, y$  は  $(\xi, \eta)$  の関数だから, 写像  $F: \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^2$  とは領域

<sup>10)</sup> チェイン・ルール: the chain rule.

<sup>11)</sup>  $\xi$ : xi;  $\eta$ : eta. ギリシア文字  $\xi, \eta, \zeta$  (zeta) はしばしばローマ文字  $(x, y, z)$  の対応物として使われる.

$D \subset \mathbb{R}^2$  上で定義された 2 個の関数の組とみなすことができる :

$$(4.7) \quad F: \mathbb{R}^2 \supset D \ni (\xi, \eta) \mapsto (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \in \mathbb{R}^2.$$

このとき, 2 つの 2 変数関数  $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$  を  $F$  の成分とよぶ<sup>12)</sup>. 式が長くなるのを避けるために, ベクトル記法を用いて

$$\mathbf{x} = F(\boldsymbol{\xi}) \quad (\mathbf{x} = (x, y), \boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta))$$

などを書くことがある. 写像  $F = (x, y): \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^2$  が  $C^k$ -級 であるとは<sup>13)</sup>, 各成分  $x, y$  が  $C^k$ -級 (26 ページ) となることである.

定義 4.5. 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上の  $C^1$ -級写像  $F = (x, y): D \rightarrow \mathbb{R}^n$  に対して

$$dF = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix}$$

で与えられる 2 次正方行列を  $F$  の微分またはヤコビ行列 という<sup>14)</sup>.

合成写像・逆写像とその微分 領域  $D, U \subset \mathbb{R}^2$  上で定義された写像  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2, G: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  が, 任意の  $\mathbf{x} = (x, y) \in D$  に対して  $F(\mathbf{x}) \in U$  をみたすとき,

$$G \circ F: \mathbb{R}^2 \supset D \ni \mathbf{x} \mapsto G(F(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^2$$

で与えられる写像  $G \circ F: \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $F$  と  $G$  の合成写像<sup>15)</sup> という.

命題 4.6. 上の状況で,  $F, G$  がともに  $C^1$ -級ならば

$$d(G \circ F) = dG dF, \quad \text{すなわち} \quad d(G \circ F)(\mathbf{x}) = dG(F(\mathbf{x})) dF(\mathbf{x})$$

が成り立つ. ただし右辺の積は行列の積を表す.

領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  の各点  $\mathbf{x}$  に対してそれ自身を対応させる写像

$$\text{id}_D: D \ni \mathbf{x} \mapsto \text{id}_D(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \in D$$

を  $D$  上の恒等写像<sup>16)</sup> という. 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  から  $U \subset \mathbb{R}^2$  への写像  $F: D \rightarrow U$

<sup>12)</sup>写像: a map; 成分: components.

<sup>13)</sup>本来なら微分可能性から定義していくべきだが, 簡単のため  $C^k$ -級 の概念だけを定義しておく. こういうもののみを考えていても実用上はほとんど問題がない.

<sup>14)</sup>微分: the differential; ヤコビ行列: the Jacobian matrix; ヤコビ: Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804–1851, D).

<sup>15)</sup>合成: the composition.

<sup>16)</sup>恒等写像: the identity map; 定義域  $D$  が文脈より自明な場合は,  $\text{id}_D$  を単に  $\text{id}$  と書く場合がある.

に対して,  $G \circ F = \text{id}_D, F \circ G = \text{id}_U$  をみたす写像  $G: U \rightarrow D$  が存在するとき,  $G$  を  $F$  の逆写像といい,  $G = F^{-1}$  と書く<sup>17)</sup>.

例 4.7. 領域

$$D = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}, \quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$$

に対して

$$F: D \ni (r, \theta) \mapsto F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in U,$$

$$G: U \ni (x, y) \mapsto G(x, y) = \left( \sqrt{x^2 + y^2}, \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} \right) \in D$$

とすると  $G = F^{-1}, F = G^{-1}$  である. 実際,  $(r, \theta) \in D$  に対して  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

なので  $\text{Tan}^{-1} \tan \theta = \theta$  (定義 1.6 参照) だから,  $r > 0$  に注意すれば

$$\begin{aligned} G \circ F(r, \theta) &= G(r \cos \theta, r \sin \theta) = \left( \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}, \text{Tan}^{-1} \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} \right) \\ &= (r, \text{Tan}^{-1} \tan \theta) = (r, \theta) = \text{id}_D(r, \theta). \end{aligned}$$

一方,  $\theta = \text{Tan}^{-1}(y/x)$  とすると, 逆正接関数の定義から  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  だから  $\cos \theta > 0$ . したがって,  $x > 0$  に注意して

$$\begin{aligned} \cos \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} &= \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} \\ &= \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} &= \sin \theta = \cos \theta \tan \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{y}{x} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

これらから  $F \circ G(x, y) = F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}\right) = (x, y) = \text{id}_U(x, y)$ .  $\diamond$

注意 4.8. 座標平面上の点  $(x, y)$  に対して例 4.7 のように  $(r, \theta) = G(x, y)$  と定めるとき,  $(r, \theta)$  を座標平面の極座標という. これに対して,  $(x, y)$  を直交座標系 あるいは デカルト座標系 という<sup>18)</sup>.

例 4.7 の表示では,  $(x, y)$  平面の右半分しか極座標で表示できないが, 通常は次

<sup>17)</sup>逆写像: the inverse map;  $F^{-1}$ : the inverse of  $F/F$ -inverse;

<sup>18)</sup>極座標: the polar coordinate system; 直交座標系: the orthogonal coordinate system; デカルト座標系: the Cartesian coordinate system; デカルト: Descartes, René (Renatus Cartesius; 1596–1650).

のように平面のほぼ全体を表せるように拡張する：領域

$$\tilde{D} = \{(r, \theta) \mid r > 0, -\pi < \theta < \pi\}, \quad \tilde{U} = \{(x, y) \mid y \neq 0 \text{ または } x > 0\}$$

を考え,  $h: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$h(x, y) := \begin{cases} \tan^{-1} \frac{y}{x} & (x > 0) \\ -\tan^{-1} \frac{x}{y} + \frac{\pi}{2} & (x \leq 0, y > 0) \\ -\tan^{-1} \frac{x}{y} - \frac{\pi}{2} & (x \leq 0, y < 0) \end{cases}$$

と定め<sup>19)</sup>,

$$\tilde{F}: \tilde{D} \ni (r, \theta) \mapsto \tilde{F}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \tilde{U},$$

$$\tilde{G}: \tilde{U} \ni (x, y) \mapsto \tilde{G}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, h(x, y)) \in \tilde{D}$$

とおけば  $\tilde{F} = \tilde{G}^{-1}$ ,  $\tilde{G} = \tilde{F}^{-1}$  となる. 座標平面上の点  $(x, y)$  に対応する  $(r, \theta) = \tilde{G}(x, y)$  を  $(x, y)$  の極座標という.

**命題 4.9.** 写像  $F: \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$  が逆写像  $G = F^{-1}$  をもち,  $F, F^{-1}$  ともに  $C^1$ -級ならば,

$$dF^{-1} = (dF)^{-1} \quad \text{すなわち} \quad d(F^{-1})(F(x)) = (dF(x))^{-1}$$

が成り立つ. ただし右辺の “-1” は 正方行列の逆行列を表す.

証明. 恒等写像の微分が単位行列  $E$  となることに注意して,  $F^{-1} \circ F = \text{id}_D$  に命題 4.6 を適用すれば  $dF^{-1}dF = E$ , また  $F \circ F^{-1} = \text{id}_U$  に命題 4.6 を適用すれば  $dFdF^{-1} = E$ . したがって  $dF^{-1}$  は  $dF$  の逆行列である.  $\square$

### 変数変換

**例 4.10** (平面極座標とラプラシアン). 例 4.7 の状況を考える:

$$(4.8) \quad x = x(r, \theta) = r \cos \theta, \quad y = y(r, \theta) = r \sin \theta.$$

このとき  $F: (r, \theta) \mapsto (x, y)$  の微分 (定義 4.5) は

$$(4.9) \quad dF = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix},$$

<sup>19)</sup>  $h(x, y)$  は原点  $(0, 0)$  と点  $(x, y)$  を結ぶ平面上の有向線分が  $x$  軸の正の部分と成す角を表している. この関数は, たとえば C や Fortran などでは  $\text{atan2}(x, y)$  という関数として実装されている.

だから, その逆写像  $G = F^{-1}$  の微分は, 命題 4.9 と逆行列の公式 (4.5) から

$$(4.10) \quad dG = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = (dF)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}$$

となる. したがって

$$(4.11) \quad \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

平面上の  $C^2$ -級関数  $f(x, y)$  に対して

$$(4.12) \quad \Delta z = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

を対応させる  $\Delta$  をラプラス作用素またはラプラシアンという (例 2.10). いま,  $f(x, y)$  を (4.8) によって  $(r, \theta)$  の関数とみなしたとき,  $\Delta f$  を  $f$  の  $r, \theta$  に関する偏導関数を用いて表そう. 式 (4.11) を用いれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta f_{rr} - \frac{2}{r} \cos \theta \sin \theta f_{r\theta} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta f_{\theta\theta} + \frac{1}{r} \sin^2 \theta f_r + \frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta f_\theta \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta f_{rr} + \frac{2}{r} \cos \theta \sin \theta f_{r\theta} + \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta f_{\theta\theta} + \frac{1}{r} \cos^2 \theta f_r - \frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta f_\theta \end{aligned}$$

なので, 次を得る.

$$(4.13) \quad \Delta f = f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}. \quad \diamond$$

### 4.4 陰関数

領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上で定義された 2 変数関数  $F(x, y)$  に対して, 式  $F(x, y) = 0$  は  $x$  と  $y$  の関係式である. これを “ $y$  について解く” ことができたとき:

$$F(x, y) = 0 \quad \iff \quad y = \varphi(x).$$

このとき, 関係式  $F(x, y) = 0$  は関数  $y = \varphi(x)$  を暗に表しているので,  $y = \varphi(x)$  の陰関数<sup>20)</sup>表示という.

**例 4.11.** (1)  $F(x, y) = 2x - 3y + 5$  とすると,  $F(x, y) = 0$  は  $y = \frac{1}{3}(2x + 5)$  と書ける. また, 同じ式は  $x = \frac{1}{2}(3y - 5)$  とも書ける.

(2)  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  とおくと, 関係式  $F(x, y) = 0$  は  $y$  について解

<sup>20)</sup> 陰関数: an implicit function.

けない。しかし,  $F$  の定義域を  $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$  に限ると

$$(x, y) \in U \text{ かつ } F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 < x < 1)$$

と,  $y$  は  $x$  の関数とみなせる。同様に定義域を  $U' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$  に限れば, 関係式は関数  $y = -\sqrt{1-x^2}$  を与える。また, 定義域を  $\{(x, y) \mid x > 0\}$  とすれば,  $F(x, y) = 0$  は  $x = \sqrt{1-y^2}$  と書ける。◇

**陰関数定理** 一般に  $f(x, y) = 0$  が  $y$  についてとけるか否かを判定するのは難しいが, 次の十分条件が知られている:

**定理 4.12** (陰関数定理の特別な場合). 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上の  $C^k$ -級関数  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$  と  $F(x_0, y_0) = 0$  をみたす点  $(x_0, y_0) \in D$  をとる。もし,  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  が成り立っているならば,  $P$  を含む領域  $U \subset D$  と,  $\mathbb{R}$  のある开区間  $I$  上で定義された  $C^k$ -級の 1 変数関数  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  で次をみたすものが存在する:

$$(x, y) \in U \text{ かつ } F(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in I \text{ かつ } y = \varphi(x).$$

とくに各  $x \in I$  に対して  $F(x, \varphi(x)) = 0$  が成立する。

定理の結論は,  $P$  の十分近くで,  $F(x, y) = 0$  が  $y$  について解けることを表している。また, 定理 4.12 で変数  $x$  と  $y$  の役割を取り替えれば,  $F_x(P) \neq 0$  ならば  $P$  の近くで  $F(x, y) = 0$  は  $x$  について解けることもわかる。

変数の個数が多いときも同様の性質が成り立つ。

**例 4.13.**  $\mathbb{R}^3$  で定義された 3 変数関数  $F(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$  は  $C^\infty$ -級である。点  $P = (0, 0, 1)$  は  $F(P) = 0$  をみたしているが, さらにまた  $F_z(P) = 2 \neq 0$  が成り立つ。このとき,  $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ ,  $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  とすると,

$$F(x, y, z) = 0 \text{ かつ } (x, y, z) \in U \Leftrightarrow z = \sqrt{1-x^2-y^2} \text{ かつ } (x, y) \in V$$

となる。すなわち  $F(x, y, z) = 0$  は  $z$  について解ける。集合  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$  は  $\mathbb{R}^3$  の原点を中心とする半径 1 の球面だが, 関係式を  $z$  について解いて, “北半球” のグラフ表示が得られたことになる<sup>21)</sup>。◇

<sup>21)</sup>球面: a sphere; これは球の表面を表す。中身の詰まった球は, 単に球 a ball, あるいは球体という。北半球: the Northern Hemisphere.

なめらかな曲線 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上の  $C^\infty$ -級関数  $F$  に対して, 集合  $C := \{(x, y) \in D \mid F(x, y) = 0\}$  を考える。点  $P \in C$  に対して,  $P$  を含む  $\mathbb{R}^2$  の領域  $U$  をうまくとれば, 共通部分  $C \cap U$  が  $C^\infty$ -級関数のグラフと合同となるとき,  $C$  は  $P$  の近くでなめらかな曲線<sup>22)</sup>であるということにする。各点の近くでなめらかな曲線であるとき  $C$  を単になめらかな曲線であるという。**例 4.14.**  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  は原点を中心とする半径 1 の円<sup>23)</sup>となるが, これはなめらかな曲線である。実際, 点  $P \in C$  は

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{(x, y) \mid y > 0\}, & U_2 &:= \{(x, y) \mid y < 0\}, \\ U_3 &:= \{(x, y) \mid x > 0\}, & U_4 &:= \{(x, y) \mid x < 0\} \end{aligned}$$

のいずれかの要素となるが, 各  $j = 1, 2, 3, 4$  に対して  $C \cap U_j$  は  $C^\infty$ -級関数  $\sqrt{1-x^2}$  ( $-1 < x < 1$ ) のグラフと合同である。◇

定理 4.12 から次がすぐにわかる:

**命題 4.15.** 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上で定義された  $C^\infty$ -級関数  $F$  に対して  $C := \{(x, y) \in D \mid F(x, y) = 0\}$  とおく。各  $P \in C$  で  $(dF)_P \neq (0, 0)$  ならば  $C$  はなめらかな曲線である。

**例 4.16.** 関数  $F(x, y) := 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2$  に対して

$$dF_{(x,y)} = (4x(1-x^2-y^2), -4y(1+x^2+y^2))$$

だから  $dF_{(x,y)} = (0, 0)$  となるのは  $(x, y) = (0, 0), (1, 0), (-1, 0)$  のときのみである。とくに  $F(\pm 1, 0) \neq 0, F(0, 0) = 0$  なので,  $C = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$  は  $(0, 0)$  の近くをのぞいてなめらかな曲線である。この曲線はレムニスケート<sup>24)</sup>とよばれる(問題 4-9 の  $a = 0$  の場合)。◇

### 陰関数の微分法

**命題 4.17.** 定理 4.12 の状況で  $F(x, y) = 0$  が  $y = \varphi(x)$  の陰関数表示となっているとき, 次が成り立つ:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = - \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \Big/ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \quad (y = \varphi(x)).$$

<sup>22)</sup>なめらかな曲線: a smooth curve.

<sup>23)</sup>円: a circle; 原点を中心とする半径 1 の円: the circle centered at the origin with radius 1.

<sup>24)</sup>レムニスケート: the lemniscate.

証明 . 恒等式  $F(x, \varphi(x)) = 0$  の両辺を  $x$  で微分すると, 命題 3.23 (定理 4.3) により

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} F(x, \varphi(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \frac{d\varphi(x)}{dx} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \frac{d\varphi(x)}{dx}. \end{aligned}$$

定理 4.12 の仮定から, 考えている点の近くで  $F_y \neq 0$  だから結論を得る.  $\square$

命題 4.17 の結論の式を次のように書くこともある:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ .

同様に,  $F(x, y) = 0$  が  $x = \psi(y)$  の陰関数表示で,  $F_x \neq 0$  であるとき,

$$\frac{d\psi}{dy}(y) = -\frac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)} \quad (x = \psi(y)) \quad \text{すなわち} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{F_y}{F_x}.$$

## 問 題 4

- 4-1 命題 4.2 を確かめなさい .
- 4-2 平面上の点  $(x, y)$  における標高が, 多項式  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$  で表されているような世界があるとす. この世界を, 原点を中心とする半径 1 の円に沿って, 反時計回りに速さ 1 で歩くと, この旅はどのようなものになるか. すなわち, 上り坂, 下り坂になる経路上の部分を描きなさい. ヒント: 考えている旅は例 3.22 の (2) である .
- 4-3 点  $P = (a, b)$  を含む領域で定義された 2 変数関数  $f$  の  $P$  における全微分  $(df)_P$  は  $(0, 0)$  でないとする. このとき,  $f$  の点  $P$  における単位ベクトル  $v$  方向の方向微分  $(df)_P(v)$  が最大になるのは  $v$  が  $(\text{grad}_f)_P$  と同じ向きに平行なときである. このことを示しなさい. ヒント:  $v$  は単位ベクトルであることに注意 .
- 4-4 点  $P = (a, b)$  を含む領域で定義された 2 変数関数  $f$  の  $P$  における全微分  $(df)_P$  は  $(0, 0)$  でないとする. 点  $P$  を通る  $f$  の等高線を  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $\gamma(0) = P$ ) とパラメータ表示するとき,  $t = 0$  における  $\gamma$  の速度ベクトル  $\dot{\gamma}(0)$  は  $(\text{grad } f)_P$  に直交することを示しなさい. すなわち, “等高線は勾配ベクトルに直交する” .
- 4-5 定数  $c (\neq 0)$  に対して  $\xi = x + ct, \eta = x - ct$  により変数変換  $(t, x) \mapsto (\xi, \eta)$  を定める. このとき,  $C^2$ -級関数  $f(t, x)$  に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}$$

となることを確かめなさい. さらに,  $f_{tt} - c^2 f_{xx} = 0$  を満たす  $C^2$ -級関数  $f$  は, 2 つの  $C^2$ -級の 1 変数関数  $F, G$  を用いて  $f(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct)$  という形に書けることを示しなさい.

方程式  $f_{tt} = c^2 f_{xx}$  を波動方程式という (例 2.12). ここに述べたことを, “波動方程式のダランベールの解法<sup>25)</sup>” という (第 2 回の問題 2-11).

- 4-6 空間のスカラー場  $f(x, y, z)$  に対して  $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$  を対応させる  $\Delta$  を空間のラプラス作用素という (第 2 回の問題 2-13). 空間の変数変換

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \cos \varphi, & z &= r \sin \varphi \\ & & & & & (r > 0, -\pi < \theta < \pi, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

に対して

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \frac{\sin \theta}{\cos \varphi} & \frac{1}{r} \frac{\cos \theta}{\cos \varphi} & 0 \\ -\frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi & -\frac{1}{r} \sin \theta \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

であることを確かめ,

$$\Delta f = f_{rr} + \frac{2}{r} f_r + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} f_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} f_{\varphi\varphi} - \frac{1}{r^2} \tan \varphi f_\varphi$$

となることを確かめなさい.

- 4-7  $F(x, y) = x^2 - y^3$  とするとき  $F(x, y) = 0$  で与えられる  $\mathbb{R}^2$  の部分集合はなめらかな曲線であるかを調べ, この図形の形を描きなさい .
- 4-8 定理 4.12 の状況, すなわち  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$  の点  $P = (x_0, y_0)$  において  $F_y \neq 0$  であり,  $P$  の近くで  $C$  がグラフ  $y = \varphi(x)$  と表されているとする. このとき次を示しなさい:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi''(x) = -\frac{F_{xx} F_y^2 - 2F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2}{F_y^3}.$$

ただし, 右辺の  $F_{xx}$  などは  $(x, \varphi(x))$  における値を表す .

- 4-9 定数  $a$  に対して  $F(x, y) = 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2 - a, C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$  とおく. このとき  $C$  がグラフ  $y = \varphi(x)$  と書けるような範囲を調べ, そこでの  $\varphi$  の増減, 変曲点を調べ  $C$  の形を描きなさい (ヒント:  $a$  の値によって場合分けが起きる).
- 4-10  $\mathbb{R}^3$  の領域  $D$  上で定義された  $C^\infty$  級の 3 変数関数  $F(x, y, z)$  を用いて関係式  $F(x, y, z) = 0$  を考える. とくに, 点  $P = (a, b, c)$  において  $F(P) = F(a, b, c) = 0$  が成り立ち, さらに,  $P$  において  $F_x, F_y, F_z$  のいずれもが 0 でないとする. このとき,  $P$  の近くで  $F(x, y, z) = 0$  は  $x, y, z$  のいずれの変数についても解くことができる:

$$F(x, y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \xi(y, z), \quad y = \eta(z, x), \quad z = \zeta(x, y).$$

点  $P$  の近くで  $F(x, y, z) = 0$  が成り立っているとき,

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}(y, z) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z}(z, x) \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x}(x, y) = -1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

であることを確かめなさい.

<sup>25)</sup>ダランベール: d'Alembert, Jean Le Rond (1717–1783, F).