5. 重積分の考え方

5.1　1 変数関数の積分再論

まず，1 変数関数の定積分の定義を概観し，連続関数に関しては，それが高等学校で学んだ定義と同等であることを述べる．

■ 積分可能性　閉区間 $[a,b]$ の**分割**とは，有限個の実数の列

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\} \qquad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b)$$

のことである．分割 Δ の**幅**とは，次で定まる正の数のこととする[1]：

$$|\Delta| := \max\{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_1|, \dots, |x_N - x_{N-1}|\}.$$

区間 $I = [a,b]$ 上の 1 変数関数 f と，区間 I の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ に対して，次のように定める[2]：

$$\overline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{N} \bar{f}_j \Delta x_j, \quad \underline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{N} \underline{f}_j \Delta x_j, \quad \Delta x_j = x_j - x_{j-1} \tag{5.1}$$

$$\bar{f}_j := (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } f \text{ の “最大値”}),$$

$$\underline{f}_j := (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } f \text{ の “最小値”}).$$

定義 5.1. 区間 I で定義された関数 f が I で**積分可能**[3]である，とは I の分割 Δ の幅が 0 に近づくとき $\overline{S}_\Delta(f)$, $\underline{S}_\Delta(f)$ が同じ値に近づくことである．このとき，その値を区間 I における f の**積分**といい，次のように書く[4]：

$$\int_I f(x)\,dx \quad \left(= \int_a^b f(x)\,dx\right).$$

[*]2024 年 7 月 09 日/11 日

[1]最大値 $\max\{a_1, \dots, a_N\}$ は，数 a_1, …, a_N のうち最大の値を表す．

[2]関数 f は区間 $[x_{j-1}, x_j]$ で最大値（最小値）をとるとは限らないので，きちんと定義を述べるためには上限 the superimum（下限 the infinimum）という言葉を使う．これは微分積分学第二で扱う．本節では，主に連続関数の積分を扱う．定理 5.8 で述べるように閉区間で連続な関数はその区間で最大値・最小値をとるから，ここで最大値，最小値と言っても問題は生じない．

[3]積分可能：integrable; 区間 I における f の積分：the integral of f on the interval I.

[4]ここでの定義では $a < b$ が仮定されている．1 変数関数の積分は，下端と上端の大小が逆転している場合も考えるのが普通なので，それを含め (5.2) で定義する．

例 5.2. 区間 $[0,1]$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

を考える[5]．分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ に対して各区間 $[x_{j-1}, x_j]$ には有理数も無理数も含まれるので

$$\overline{S}_\Delta(f) = \sum_{j=1}^{N} 1(x_j - x_{j-1}) = x_N - x_0 = 1, \quad \underline{S}_\Delta(f) = \sum_{j=1}^{N} 0(x_j - x_{j-1}) = 0,$$

したがって f は $[0,1]$ で積分可能でない．　◇

例 5.3. 区間 $[-1,1]$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

を考える．$[-1,1]$ の分割 $\Delta = \{x_0, \dots, x_N\}$ に対して番号 $k = k(\Delta)$ を $0 \in [x_{k-1}, x_k]$ となるようにとると，f の最大値は，区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で 1，それ以外の小区間では 0 になる．また f の最小値は 0 だから，

$$\overline{S}_\Delta(f) = x_k - x_{k-1} \qquad \bigl(k = k(\Delta)\bigr), \qquad \underline{S}_\Delta(f) = 0.$$

ここで $0 < x_k - x_{k-1} \leqq |\Delta|$ だから，$|\Delta|$ をどんどん小さくしていくと $\overline{S}_\Delta(f)$ は 0 に近づく．したがって，f は $[-1,1]$ で積分可能で積分の値は 0.　◇

■ 定積分とその性質　関数 f が区間 $I = [a,b]$ で積分可能であるとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_I f(x)\,dx, \qquad \int_b^a f(x)\,dx := -\int_I f(x)\,dx \tag{5.2}$$

と書き f の**定積分**[6]という．定義から次がわかる．

補題 5.4. 区間 $I = [a,b]$ 上で積分可能な 2 つの関数 f, g が

$$f(x) \leqq g(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

をみたしているならば，次が成り立つ：

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx.$$

[5]脚注 2 で「主に連続関数を扱う」と述べたにもかかわらず，この関数は連続ではない．

[6]定積分：the definite integral.

ここでは深入りしないが，定義から直接，次の事実を導くことができる：

補題 5.5 (積分の線型性)**.** 関数 f, g が区間 $[a,b]$ で積分可能ならば，$f+g$, αf (α は定数) はそれぞれ $[a,b]$ で積分可能で，次が成り立つ：

$$\int_a^b \bigl(f(x)+g(x)\bigr)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$
$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx.$$

また，区間を分割することで次を示すことができる [7]：

補題 5.6. 数 a, b, c を含む閉区間で積分可能な関数 f に対して

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

区間を分割して積分の値を求めるには次のやり方が有効である

命題 5.7. 区間 $[a,b]$ の分割の列

$$\Delta^{[n]} : a = x_0^{[n]} < x_1^{[n]} < \dots < x_{N_n}^{[n]} = b \qquad (n=1,2,\dots)$$

で $\lim_{n\to\infty}|\Delta^{[n]}| = 0$ をみたすものをとる．各番号 n と $j=1,2,\dots,N_n$ に対して $\Delta^{[n]}$ の第 j 番目の区間の点 $\xi_j^{[n]}$ をとる：$\xi_j^{[n]} \in [x_{j-1}^{[n]}, x_j^{[n]}]$. もし，関数 f が $[a,b]$ で積分可能なら

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{N_n} f(\xi_j^{[n]})\left(x_j^{[n]} - x_{j-1}^{[n]}\right)\right) \tag{5.3}$$

が成り立つ．

証明. 式 (5.1) の定義から，式 (5.3) の右辺の和を S_n とおくと，

$$\underline{S}_{\Delta^{[n]}}(f) \leqq S_n \leqq \overline{S}_{\Delta^{[n]}}(f)$$

が成り立つ．ここで f の積分可能性と $|\Delta^{[n]}| \to 0$ の仮定から，この式の両辺は $n\to\infty$ としたとき f の $[a,b]$ での定積分の値に収束する． □

■ **微積分学の基本定理**　区間 $I=[a,b]$ で定義された関数 f が I **で連続**または I **上の連続関数**である [8] とは，I の各点 α に対して $\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$

[7] 数 c が区間 $[a,b]$ の内部にある場合は，$[a,c]$ と $[c,b]$ の分割を合わせて $[a,b]$ の分割とすることで，等式を示すことができる（深入りはしない）．さらに a, b, c の大小関係が $a<c<b$ でない場合でも (5.2) の定義を用いれば，結論が成り立つことが容易に分かる．

[8] 連続：continuous, 連続関数：a continuous function.

となることであった．これは

$$\alpha \text{ に収束する任意の数列 } \{x_n\} \text{ に対して} \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\alpha) \tag{5.4}$$

が成り立つことと同値である．次は，高等学校で学んだ連続関数の重要な性質であるが，ここでは証明抜きに認めることにする [9]：

定理 5.8 (最大・最小値の存在)**.** 閉区間 $I=[a,b]$ で定義された連続関数 f は I で最大値・最小値をとる．すなわち任意の $x\in I$ に対して $f(x) \leqq f(\alpha)$, $f(x) \geqq f(\beta)$ をみたす α, $\beta \in I$ が存在する．

以上の言葉のもと次の「連続関数の積分可能性定理」[10] が成り立つ：

定理 5.9. 閉区間 $I=[a,b]$ で定義された**連続関数** f は I で積分可能である．

ここで，f が連続ならば，その絶対値をとった関数 $|f|$ も連続だから，

系 5.10 (積分の三角不等式)**.** 関数 f が閉区間 $I=[a,b]$ で連続ならば，$|f|$ は積分可能で，次が成り立つ：

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

証明. $|f|$ の積分可能性は $|f|$ の連続性と定理 5.9 からわかる．さらに，不等式は $-|f(x)| \leqq f(x) \leqq |f(x)|$ と補題 5.4 からしたがう． □

微積分学の基本定理（定理 5.11）は，本節での積分の定義と高等学校での積分の定義の関係を表す重要な定理である：

定理 5.11 (微積分学の基本定理)**.** 区間 $I=[a,b]$ 上の連続関数 f に対して

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

とおくと F は I で微分可能で $F'(x) = f(x)$ が成り立つ．

証明. 区間 $[a,b]$ の点 x と，$x+h$ が $[a,b]$ に入るような h をとると，補題 5.6 から

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

[9] 後期の微分積分学第二で扱う．

[10] このことの証明は「連続性」という実数の性質によっている．実際，通常見られる証明では「閉区間で定義された連続関数の一様連続性」を用いるが，その証明には実数の連続性公理が必要である．

したがって，補題 5.5, 系 5.10 を用いれば

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_x^{x+h} f(x)\,dt\right|$$
$$= \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}\bigl\{f(t)-f(x)\bigr\}\,dt\right| \leqq \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}\bigl|f(t)-f(x)\bigr|\,dt\right|.$$

ここで，0 に収束する数列 $\{h_n\}$ を x と $x+h_n$ が $[a,b]$ に含まれるようにとる．すると，t の関数 $g(t) := |f(t)-f(x)|$ は $I_n := [x, x+h_n]$ で連続だから，そこで最大値をとる．とくに $g(t_n) = |f(t_n)-f(x)| \geqq g(t)$ が各 $t \in I_n$ で成り立つような $t_n \in I_n$ が存在する．$t_n \in I_n$ だから $n \to \infty$ で $t_n \to x$．補題 5.4 から

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| \leqq \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} g(t_n)\,dt\right| = \frac{1}{|h|}|h|g(t_n) = g(t_n).$$

ここで $n \to \infty$ とすると g の連続性から $g(t_n) \to g(x) = 0$ となるので，

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) = 0. \qquad \square$$

■ 原始関数と積分 (定積分) の計算　1 変数関数 f の**原始関数**[11]とは $F'(x) = f(x)$ となる関数 F のことである．

区間 I で定義された関数 f の 2 つの原始関数 F, G は $G(x) = F(x) +$ 定数をみたす．実際，$\bigl\{G(x)-F(x)\bigr\}' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ なので $G(x) - F(x)$ は I で定数である．すなわち，**区間 I で定義された関数 f の原始関数は，定数の差をのぞいてただ一つ定まる**.

命題 5.12. 区間 I で連続な関数 f には原始関数が存在する．

証明. 区間 I 内の点 a を一つ固定して $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ とおけばよい．　$\square$

例 5.13. 関数 e^{-x^2} の原始関数は (定数の差をのぞき) $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ である．$\diamondsuit$

連続関数 f に対して，その原始関数が $F(x)$ であることを

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

と書く [12]．次は，高等学校では「定積分の定義」となっていたものである：

[11] 原始関数：the primitive
[12] “$+C$” と積分定数を書くこともある．

命題 5.14. 区間 I 上の f の一つの原始関数を F とするとき，I の点 a, b に対して次が成り立つ：

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

■ 曲線の長さ (道のり)

命題 5.15. 区間 $[a,b]$ 上の C^1-級関数 f のグラフの長さ (弧長) は，

$$\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

で与えられる．

証明. 区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ に対して点 $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_N, f(x_N))$ を結ぶ折れ線の長さは

$$I_\Delta = \sum_{j=1}^N \sqrt{1+\left(\frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}\right)^2}\,(x_j - x_{j-1})$$

で与えられる．ここで，平均値の定理から

$$\frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} = f'(\xi_j) \qquad x_{j-1} < \xi_j < x_j$$

を満たす ξ_j が存在するから，

$$I_\Delta = \sum_{j=1}^N \sqrt{1+(f'(\xi_j))^2}\,(x_j - x_{j-1}) \qquad (\Delta_j = x_j - x_{j-1})$$

となる．ここで f が C^1-級だから $\sqrt{1+f'(x)^2}$ は連続なので，命題 5.7 より $|\Delta| \to 0$ のとき I_Δ は結論の積分に収束する．　$\square$

系 5.16. パラメータ t により $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ $(a \leqq t \leqq b)$ と表示された平面上の C^1-級曲線の長さは

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

で与えられる．

5.2　多変数関数の積分

ここでは，多変数（とくに 2 変数）関数の積分の定義を与える．以降，厳密な議論を行うには極限のきちんとした取り扱いが必要となるが，煩雑な議

論はひとまずおいて，多変数関数の積分の定義と意味を学ぼう．

閉区間 $[a,b]$ と $[c,d]$ に対して

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\,|\,x\in[a,b],y\in[c,d]\}$$
$$=\{(x,y)\,|\,a\leqq x\leqq b,c\leqq y\leqq d\}\subset\mathbb{R}^2$$

を $[a,b]$ と $[c,d]$ の**直積**という [13]．この集合は座標平面 $\mathbb{R}^2$ の長方形とその内部を表している．いま，区間 $[a,b]$ と $[c,d]$ の分割をそれぞれ

(5.5) $\quad a=x_0<x_1<\dots<x_m=b,\qquad c=y_0<y_1<\dots<y_n=d$

ととると，長方形 $I=[a,b]\times[c,d]$ は，mn 個の小さな長方形に分割される：

$$I=[a,b]\times[c,d]=\bigcup_{\substack{j=1,\dots,m\\k=1,\dots,n}}\Delta_{jk},\qquad \Delta_{jk}=[x_{j-1},x_j]\times[y_{k-1},y_k]$$

この分割の 2 つのことなる長方形は，たかだか境界にしか共通部分をもたない [14]．このような長方形の分割を Δ と書くとき，分割の**幅**とは

$$|\Delta|:=\max\{(x_1-x_0),(x_2-x_1),\dots,(x_m-x_{m-1}),(y_1-y_0),\dots,(y_n-y_{n-1})\}$$

で与えられる正の数のことである．

■ コンパクト集合　$\mathbb{R}^2$ の部分集合が **閉集合**であるとは，その補集合が開集合 (第 3 回参照) となることである [15]．連続関数 $f_1,\dots,f_n$ に対して

$$\{x\in\mathbb{R}^2\,|\,f_1(x)\geqq 0,\dots,f_n(x)\geqq 0\}\subset\mathbb{R}^2$$

という形で表される集合は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である．また，$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**有界**であるとは，十分大きい長方形 I をとれば $D\subset I$ となることである．$\mathbb{R}^2$ の有界な閉集合のことを**コンパクト部分集合**という [16]．

13) 直積：the Cartesian product; 長方形：a rectangle.
14) 「たかだか」は「多くとも」の意味．少なくとも (at least) と対になる at most の訳語．
15) 閉集合：a closed set；補集合：the comlement.
16) 有界集合：a bounded set; コンパクト集合: a compact set．ここでの定義は，通常のコンパクト集合の定義とはことなるが，$\mathbb{R}^n$ の場合はこの性質をもつことがコンパクト性の必要十分条件である．

■ 長方形上の重積分　長方形 $I=[a,b]\times[c,d]$ で定義された関数 f と I の分割 (5.5) に対して，和

$$\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^m f(\xi_{jk},\eta_{jk})(x_{j+1}-x_j)(y_{k+1}-y_k)$$
$$(\text{ただし } \xi_{jk}\in[x_{j-1},x_j],\ \eta_{jk}\in[y_{k-1},y_k])$$

を考える．幅 $|\Delta|$ を 0 に近づけるとき，(ξ_{jk},η_{jk}) のとり方によらずにこの和が一定の値に近づくとき，f は I で**積分可能**という．さらに，その極限値を長方形 I 上の f の**重積分**または**二重積分**といい [17]，次のように書く [18]：

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy.$$

■ コンパクト集合上の重積分　平面 $\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合 D 上で定義された関数 f を考える．このとき，D を含む長方形 I をひとつとり，

$$\tilde f(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & \bigl((x,y)\in D\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)\notin D\bigr)\end{cases}$$

と定め，I 上での $\tilde f$ が積分可能であるときに f は D で**積分可能**である，といい

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_I \tilde f(x,y)\,dx\,dy$$

と書く．この値を f の D 上での重積分という [19]．

■ 面積確定集合　コンパクト部分集合 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上で，定数関数 $f(x,y)=1$ が積分可能であるとき，D を**面積確定集合**，

(5.6) $$|D|:=\iint_D dx\,dy$$

を D の**面積**という [20]．

■ 積分可能性　コンパクト集合 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 f が**連続**である，とは D を含むある開集合 Ω 上で連続な関数 $\tilde f$ で，D 上で f と一致す

17) 二重積分：double integral; 多重積分：multiple integral.
18) 習慣にしたがって積分記号 $\int$ を 2 つ並べるが，ひとつしか書かない場合もある．
19) この重積分は，コンパクト集合 D を覆う長方形 I のとり方によらない．
20) 面積確定集合：a measurable set; 面積：area.

るものが存在すること，と定める．ここでは証明を与えないが，次のことは認めておきたい：

定理 5.17. $\mathbb{R}^2$ の面積確定なコンパクト部分集合 D 上で定義された連続関数 f は D で積分可能，である．

例 5.18. 平面の長方形領域 $I = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ は面積確定で $|I| = (b-a)(d-c)$ である． ♢

理論的な背景は準備不足ではあるが，以下に重積分の計算法を挙げる．重積分の意味がわかれば計算法は自明と思われる：

命題 5.19. 区間 $[a,b]$ で定義された (1 変数の) 連続関数 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ が $\varphi(x) \leqq \psi(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ を満たしているとする．このとき，

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x), a \leqq x \leqq b\}$$

とおく (図示せよ) と，これは $\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合である．とくに，D は面積確定で，次が成り立つ：

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right] dx. \tag{5.7}$$

式 (5.7) の右辺の形（1 変数関数の定積分を 2 回繰り返す）を**累次積分**という [21]．式 (5.7) の累次積分は次のように書くこともある：

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

命題 5.19 が成り立つ理由． 実際，区間 $[a,b]$ の分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ をとると，その小区間 $[x_{j-1}, x_j]$ に対応する D の部分

$$D_j := \{(x,y) \in D \,|\, x \in [x_{j-1}, x_j]\}$$

における f の積分は，分割が十分に細かいときは

$$\left[\int_{\varphi(x_{j-1})}^{\psi(x_{j-1})} f(x_j,y)\,dy\right] \Delta x_j \qquad (\Delta x_j = x_j - x_{j-1})$$

で近似される．添字 j を動かしてこれらの和をとって $|\Delta| \to 0$ とすれば，1 変数関数の積分の意味から結論が得られる． □

[21] 累次積分：an iterated integral.

例 5.20. 長方形 $[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ を含む領域上の連続関数 $f(x,y)$ に対して，

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx. \quad \diamondsuit$$

例 5.21. コンパクト集合 $D = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leqq 1\}$ 上で関数 $f(x,y) = x^2$ を積分する：$D = \left\{(x,y) \,|\, -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}, -1 \leqq x \leqq 1\right\}$ なので，命題 5.19 から

$$\iint_D x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2\,dy\right] dx = 2\int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\,dy\right] dx$$
$$= 2\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

一方，$D = \left\{(x,y) \,|\, -\sqrt{1-y^2} \leqq x \leqq \sqrt{1-y^2}, -1 \leqq y \leqq 1\right\}$ と表し直せば

$$\iint_D x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2\,dx\right] dy = 2\int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x^2\,dx\right] dy$$
$$= 2\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3}\sqrt{1-y^2}^3\right) dy = 4\int_0^1 \left(\frac{1}{3}\sqrt{1-y^2}^3\right) dy = \frac{\pi}{4}.$$

積分の順序を交換することで計算の手間が違ってくることに注意しよう． ♢

■ **多重積分** 同様に $\mathbb{R}^3$ のコンパクト部分集合 D 上での積分 (三重積分)，体積確定集合，体積，さらに一般に $\mathbb{R}^m$ 上の積分も定義される．たとえば，

- x 軸上の区間 $[a,b]$ に沿って横たわる棒の，点 x における線密度を $\rho(x)$ (kg/m) とすると，棒全体の質量は $\left(\int_a^b \rho(x)\,dx\right)$ kg.
- xy 平面上に，コンパクト集合 D の形に板が横たわっている．このとき 点 $(x,y) \in D$ における板の面密度を $\rho(x,y)$ (kg/m^2) とすると，板全体の質量は $\left(\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy\right)$ kg である．
- 空間のコンパクト集合 D の形の立体の点 $(x,y,z) \in D$ における密度が $\rho(x,y,z)$ (kg/m^3) ならば，立体の質量は $\left(\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\right)$ kg.

問　題　5

5-1 高等学校の教科書では，関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

と定義することが多い．この定義を採用しなかった理由を挙げなさい．

5-2 楕円 $E: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$ について，

(1) E が囲む平面の部分の面積は πab であることを示しなさい．

(2) E の長さは次で与えられることを示しなさい：

$$4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\,dt, \qquad k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

(3) 地球の地軸を含む平面による切り口は，赤道方向に長軸，地軸方向に短軸をもつ楕円になる．赤道方向の半径は 6377.397km，極方向の半径は 6356.079km とするときこの楕円の周の長さの近似値を求めなさい．（ヒント：近似式 $\sqrt{1-x} \fallingdotseq 1 - \frac{x}{2}$ (x が小さいとき) を用いる.）

5-3 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の第一象限の部分の 1 点を $P = (x, y)$ とする．$O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$ とし，線分 OA, OP, および双曲線の弧 AP で囲まれた部分の面積を $t/2$ とするとき，P の座標 x, y を t で表しなさい．

5-4 放物線 $y = x^2$ の $0 \leqq x \leqq a$ に対応する部分の長さを求めなさい．

5-5 サイクロイド $\gamma(t) = \bigl(t - \sin t, 1 - \cos t\bigr)$ の $0 \leqq t \leqq 2\pi$ に対応する部分と x 軸で囲まれる図形の面積， および弧の長さを求めなさい．

5-6 次の積分の値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy,\qquad D = \left\{(x, y)\,\middle|\,\begin{aligned}&x + y \leqq 1,\\ &x \geqq 0, y \geqq 0\end{aligned}\right\},$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y}\,dx\,dy,\qquad D = \{(x, y)\,|\,1 \leqq y \leqq x^2, 2 \leqq x \leqq 4\},$

(3) $\displaystyle\iint_D x^2 y\,dx\,dy,\qquad D = \left\{(x, y)\,\middle|\,\begin{aligned}&0 \leqq x \leqq \pi,\\ &0 \leqq y \leqq \sin x\end{aligned}\right\}$

(4) $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy,\qquad D = \left\{(x, y)\,\middle|\,\begin{aligned}&x \geqq 0, y \geqq 0,\\ &\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqq 1\end{aligned}\right\},$

(5) $\displaystyle\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz,\qquad D = \left\{(x, y, z)\,\middle|\,\begin{aligned}&x, y, z \geqq 0\\ &x + y + z \leqq 1\end{aligned}\right\}.$

5-7 空間に半径 R の球体がある．中心からの距離 r における球体の (体積) 密度が $\rho = \rho(r)\mathrm{kg/m^3}$ で与えられるとき，球体の質量を ρ を用いて表しなさい．ただし ρ は $[0, R]$ で定義された連続関数である．

5-8 $\mathbb{R}^2$ の長方形 $I = [a, b] \times [c, d]$ を含む領域で定義された C^2-級関数 F に対して

$$\iint_I \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,dx\,dy = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

であることを確かめなさい．

5-9 $\mathbb{R}^3$ 原点を中心とする半径 1 の球体 D の体積を $\displaystyle\iiint_D dx\,dy\,dz$ を計算することにより求めなさい．同様のことを $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$ に対して行い，半径 1 の 4 次元球体，5 次元球体の “体積” を求めなさい．

5-10 座標空間の次の図形の体積を求めなさい．ただし a, b, c は正の定数である：

$$\left\{(x, y, z)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1\right\}, \qquad \left\{(x, y, z)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} \leqq 1\right\}$$

5-11 $\mathbb{R}^2$ の単位閉円板 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,|\,x^2 + y^2 \leqq 1\}$ を含む領域で定義された 2 つの C^1-級関数 F, G に対して

$$\begin{aligned}&\iint_D \bigl(G_x(x, y) - F_y(x, y)\bigr)\,dx\,dy\\ &\qquad = \int_0^{2\pi} \Bigl(-F(\cos t, \sin t)\,(\sin t) + G(\cos t, \sin t)\,(\cos t)\Bigr)\,dt\end{aligned}$$

が成り立つことを確かめなさい．

一般に，曲線 $C: \bigl(x(t), y(t)\bigr)\ (a \leqq t \leqq b)$ と 2 変数関数 F, G に対して

$$\begin{aligned}&\int_C \Bigl(F(x, y)\,dx + G(x, y)\,dy\Bigr)\\ &\qquad := \int_a^b \Bigl(F\bigl(x(t), y(t)\bigr)\frac{dx}{dt} + G\bigl(x(t), y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}\Bigr)\,dt\end{aligned}$$

を C に沿う $F\,dx + G\,dy$ の線積分という．閉円板の連続変形で得られる集合 $\widetilde{D}$ の境界がなめらかな曲線 C であるとき，次が成り立つ（証明は省略する)：

$$\iint_{\widetilde{D}} \bigl(G_x(x, y) - F_y(x, y)\bigr)\,dx\,dy = \int_C \Bigl(F(x, y)\,dx + G(x, y)\,dy\Bigr)$$

（グリーン・ストークスの定理)．これは命題 5.12 の 2 次元版である．