

7. 広義積分

7.1 広義積分

半開区間 $(a, b]$ で定義された連続関数 f に対して

極限值 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ が存在するとき、その値を $\int_a^b f(x) dx$

と書く。関数 f が $[a, b]$ で連続であるときも同様に $\int_a^b f(x) dx$ が定義される。

また、区間 $[a, \infty)$ で定義された連続関数 f に対して

極限值 $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$ が存在するとき、その値を $\int_a^\infty f(x) dx$

と書く。同様に $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ も定義される。

これらは定積分の概念を拡張したもので広義積分¹⁾とよばれる。とくに、定義のなかに現れる極限值が存在するとき広義積分は収束する、そうでないとき発散するという。

例 7.1. (1) 正の数 $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 = 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) \rightarrow 2 \quad (\varepsilon \rightarrow +0)$$

なので、区間 $(0, 1]$ での広義積分は収束し、

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2.$$

(2) 正の数 $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = [\log x]_{\varepsilon}^1 = \log 1 - \log \varepsilon = -\log \varepsilon \rightarrow +\infty \quad (\varepsilon \rightarrow +0)$$

なので、区間 $(0, 1]$ での次の広義積分は発散する：

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx.$$

(3) 正の数 M に対して

$$\int_0^M e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^M = 1 - e^{-M} \rightarrow 1 \quad (M \rightarrow +\infty)$$

なので、区間 $[0, +\infty)$ での広義積分は収束し、

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

(4) 正の数 M に対して

$$\int_1^M \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^M = \log M \rightarrow +\infty \quad (M \rightarrow +\infty)$$

なので、区間 $[1, +\infty)$ での次の広義積分は発散する：

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx. \quad \diamond$$

次の事実は基本的である（問題 7-1）：

命題 7.2. (1) 実数 α に対して、広義積分

$$\int_0^1 x^{\alpha} dx$$

が収束するための必要十分条件は $\alpha > -1$ である。

(2) 実数 β に対して、広義積分

$$\int_1^{\infty} x^{\beta} dx$$

が収束するための必要十分条件は $\beta < -1$ である。

(3) 実数 a に対して、広義積分

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} dx$$

が収束するための必要十分条件は $a > 0$ である。

例 7.3. 原始関数が求まらなくても、広義積分の収束がわかる場合がある。た

^{*}) 2024 年 7 月 23/25 日

¹⁾ “こうぎせきぶん” と読む。“広義”は“広い意味”という意味。特異積分 improper integral ということもある。

例えば, 定数 $k \in (0, 1)$ に対して広義積分

$$(7.1) \quad \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx$$

を考えよう. 正の数 $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して

$$\int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^{\sin^{-1}(1-\varepsilon)} \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} dt \quad (x = \sin t)$$

であるが, 右辺の被積分関数は $[0, \frac{\pi}{2}]$ で連続であるから, $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限をとることができる²⁾

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} dt. \quad \diamond$$

関数 $f(x)$ が (a, b) で連続な場合は区間 $[a + \varepsilon_1, b - \varepsilon_2]$ における積分が $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (+0, +0)$ である値に収束するとき, その極限値を広義積分

$$\int_a^b f(x) dx \left(= \lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0, 0)} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x) dx \right)$$

と定める. 区間の一端または両端が有限でない場合も同様に定義する.

例 7.4. 正の数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1)$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{x}{1-x^2} dx &= \left[-\frac{1}{2} \log(1-x^2) \right]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \\ &= - \left[\frac{1}{2} (\log(1-x) + \log(1+x)) \right]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \\ &= -\frac{1}{2} (\log \varepsilon_2 + \log(2-\varepsilon_2) - \log(2-\varepsilon_1) - \log \varepsilon_1) \end{aligned}$$

であるが, $\varepsilon_1 \rightarrow +0$ のとき, 右辺の最後の項は発散するので, 広義積分

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2} dx$$

は発散する. 特別な近づけ方で $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0, 0)$ とすると, たとえば $\varepsilon_1 =$

$\varepsilon_2 = \varepsilon \rightarrow +0$ のとき

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x}{1-x^2} dx = \left[\frac{1}{2} (\log(1-x) + \log(1+x)) \right]_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} = 0 \rightarrow 0$$

²⁾ 原始関数の連続性は, 微分可能性 (定理 5.11) による.

となるが,

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2} dx = 0 \quad \text{であるとはいわない.} \quad \diamond$$

広義積分の収束判定 広義積分の値が具体的にわからなくても, 収束することはわかる場合がある.

事実 7.5. 区間 $I = (a, b]$ で定義された連続関数 f, g がともに I 上で $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ を満たし, さらに

$$f(x) \leq g(x) \quad (x \in I), \quad \text{かつ} \quad \int_a^b g(x) dx \quad \text{が収束する}$$

ならば, 広義積分

$$\int_a^b f(x) dx$$

は収束する.

この事実の証明は“実数の連続性”による. 余裕があれば微分積分学第二で説明するかもしれない³⁾.

有用な例を挙げるため, 少しだけ準備をしておく:

補題 7.6. 任意の正の整数 m と $x \geq 0$ に対して $x^m \leq m!e^x$ が成立する.

証明. 正の整数 m に対して $f_m(x) = m!e^x - x^m$ とおき, m に関する数学的帰納法により $f_m(x) \geq 0$ を示す. $x \geq 0$ のとき $(e^x - x)' = e^x - 1 \geq 0$ であるから, $e^x - x$ は単調非減少⁴⁾. したがって $e^x - x \geq e^0 - 0 = 1$. すなわち $f_1(x) \geq 0$. いま, 番号 k に対して $f_k(x) \geq 0$ ($x \geq 0$) が成り立っているならば, $f'_{k+1}(x) = kf_k(x)$ なので, f_{k+1} は $x \geq 0$ で単調非減少だから $x \geq 0$ のとき $f_{k+1}(x) \geq f_{k+1}(0) = m! \geq 0$. \square

系 7.7. 任意の負でない実数 p と $x \geq 0$ に対して

$$x^p \leq Me^x$$

が成立する. ただし $M = ([p] + 1)!$ ($[p]$ は p を超えない最大の整数) である.

証明. まず $0 \leq x \leq 1$ なら左辺は 1 以下, 右辺は 1 以上であるから結論が成り立つ. $x > 1$ のときは $x^p \leq x^{[p]+1}$ なので, $m = [p] + 1$ において補題 7.6 を適用する. \square

³⁾ 少なくとも, これと関連した話題を級数の収束判定の項で説明する.

⁴⁾ 定義域で $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) \leq f(x_2)$ が成り立つとき, 関数 f は単調非減少であるという.

系 7.8. 任意の実数 p と正の実数 a に対して $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p e^{-ax} = 0$.

証明. $p \leq 0$ のとき $x \geq 1$ ならば $x^p \leq 1$ だから,

$$0 \leq x^p e^{-ax} \leq e^{-ax} \rightarrow 0 \quad (x \geq 1, x \rightarrow +\infty).$$

$p \geq 0$ のときは, 補題 7.6 を x の代わりに $ax/2$ として適用すると, $x \geq 0$ に対して

$$(7.2) \quad \left(\frac{a}{2}\right)^p x^p \leq ([p] + 1)! e^{ax/2}$$

が成り立つので,

$$0 \leq x^p e^{-ax} \leq \left(\frac{a}{2}\right)^p ([p] + 1)! e^{-ax/2} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty)$$

となり「はさみうち」から結論が得られる. \square

命題 7.9. 任意の実数 p に対して, 次の広義積分は収束する:

$$\int_1^{\infty} x^p e^{-ax} dx$$

証明. 系 7.8 の証明の中の (7.2) を用いれば,

$$x^p e^{-ax} \leq e^{-ax/2}$$

だが, $a > 0$ だから, 右辺の $[1, +\infty)$ での広義積分は, 命題 7.2 から収束する. したがって事実 7.5 から, 与えられた広義積分は収束する. \square

例 7.10. 負でない実数 p に対して次の広義積分は収束する:

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-x^2} dx.$$

このことを確かめよう. 被積分関数は 0 で連続だから $[0, 1]$ 区間では積分可能. したがって $[1, +\infty)$ での収束を考えればよい. ここで $x \geq 1$ なら $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ なので, $0 \leq x^p e^{-x^2} \leq x^p e^{-x}$ ($x \geq 1$) が成り立つ. 命題 7.9 から右辺の $[1, +\infty)$ での広義積分は収束するから, 事実 7.5 から考えている広義積分は収束する. \diamond

注意 7.11. とくに $p = 0$ とすると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

は収束する. この積分をガウス積分⁵⁾という. 第 7.2 節で求めるように, この値は $\sqrt{\pi}$ である.

⁵⁾ガウス積分: the Gaussian integral; Gauss (Gauß), Carl Friedrich (1777–1855, G).

関数の定義 積分を用いて具体的な関数を定義することがある.

例 7.12 (ガンマ関数). 実数 $s > 0$ に対して広義積分

$$(7.3) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

は収束する (問題 7-2). そこで

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

とおき, これをガンマ関数とよぶ. \diamond

例 7.13 (ベータ関数). 正の実数 p, q に関して広義積分

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

は収束する (問題 7-4). この 2 変数関数をベータ関数とよぶ⁶⁾. \diamond

7.2 ガウス積分

定理 7.14 (ガウス積分の値).

$$(7.4) \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

例 7.10, 注意 7.11 からこの広義積分は収束する. しかし e^{-x^2} の原始関数は初等関数でないことが知られているので, 積分の値を求めるには特別なアイデアが必要である. 以下, 重積分の変数変換の応用として, (7.4) を示す.

定理 7.14 の証明. いま, 正の数 M に対して

$$I_M := \int_0^M e^{-x^2} dx$$

とおくと,

$$(7.5) \quad \begin{aligned} (I_M)^2 &= \left(\int_0^M e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_0^M e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^M e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_0^M e^{-y^2} \left(\int_0^M e^{-x^2} dx \right) dy = \iint_{E_M} e^{-x^2-y^2} dx dy \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし $E_M := [0, M] \times [0, M]$ である.

一方, 一般に正の実数 R に対して

$$(7.6) \quad J_R := \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy, \quad D_R := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq R^2, \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$

⁶⁾ B はローマ文字の b の大文字ではなく, ギリシア文字 β の大文字である.

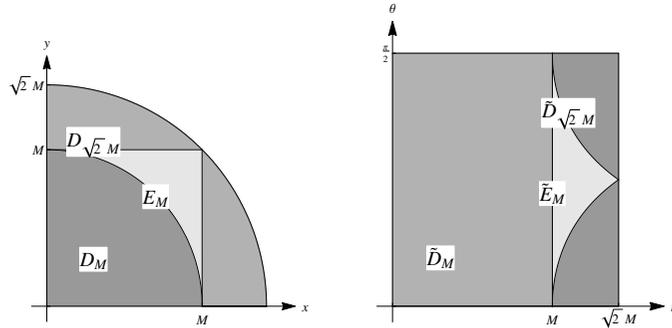


図 7.1 ガウス積分の計算

とおくと、極座標 (r, θ) ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$) により D_R は

$$\tilde{D}_R := \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\} = [0, R] \times \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

に対応するから、ヤコビアン $\partial(x, y)/\partial(r, \theta) = r$ に注意すれば、

$$(7.7) \quad J_R = \iint_{\tilde{D}_R} e^{-r^2} r \, dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R r e^{-r^2} \, dr \right) d\theta \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R \left(\frac{-1}{2} e^{-r^2} \right)' \, dr \right) d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} (1 - e^{-R^2})$$

を得る。

ここで、与えられた M に対して $D_M \subset E_M \subset D_{\sqrt{2}M}$ が成り立つ (図 7.1) から、

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-M^2}) = J_M \leq (I_M)^2 \leq J_{\sqrt{2}M} = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2M^2}),$$

となるから

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx \right)^2 = \lim_{M \rightarrow +\infty} (I_M^2) = \frac{\pi}{4}.$$

考えている積分の値は正だから (7.4) が得られた。 \square

応用として、ガンマ関数 (例 7.12) の半整数における値が求められる：

$$\text{系 7.15. } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

証明. 定義式 (7.3) の x を u^2 とおくと、

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} \, dx = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} \, du = \sqrt{\pi}. \quad \square$$

系 7.16. 定数 μ と正の数 σ に対して次が成り立つ。

$$(7.8) \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx = 1,$$

$$(7.9) \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx = \mu,$$

$$(7.10) \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx = \sigma^2.$$

証明. 変数変換 $u = (x - \mu)/(\sqrt{2}\sigma)$ により、正の数 M_1, M_2 に対して

$$\int_{-M_1}^{M_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-a_1}^{a_2} e^{-u^2} \, du \quad \left(\alpha_j := \frac{M_j + \mu}{\sqrt{2}\sigma}, j = 1, 2 \right)$$

となる。ここで $M_j \rightarrow +\infty$ と $a_j \rightarrow +\infty$ ($j = 1, 2$) は同値だから、定理 7.14 から (7.8) が得られる。

おなじ変数変換により、(7.9) の積分を計算する：正の数 M_1, M_2 に対して

$$\int_{-M_1}^{M_2} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx = \int_{-a_1}^{a_2} \frac{\sqrt{2}\sigma u + \mu}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \, du \\ = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{a_1}^{a_2} u e^{-u^2} \, du + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-a_1}^{a_2} e^{-u^2} \, du \\ = \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\sqrt{\pi}} (e^{-a_1^2} - e^{-a_2^2}) + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-a_1}^{a_2} e^{-u^2} \, du \rightarrow \mu \quad (a_1, a_2 \rightarrow +\infty).$$

最後に、

$$\int_{-M_1}^{M_2} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-a_1}^{a_2} u^2 e^{-u^2} \, du = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-a_1}^{a_2} u \left(\frac{-1}{2} e^{-u^2} \right)' \, du \\ = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left([-u e^{-u^2}]_{-a_1}^{a_2} + \int_{-a_1}^{a_2} e^{-u^2} \, du \right)$$

となる。右辺の第 1 項は系 7.8 から 0 に収束する。また、第 2 項の積分は定理 7.14 から求まるので、(7.10) を得る。 \square

ガンマ関数とベータ関数 ガウス積分に似た方法で、例 7.12, 7.13 のガンマ関数とベータ関数の関係式を導くことができる：

$$\text{定理 7.17. 任意の } p, q > 0 \text{ に対して } B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

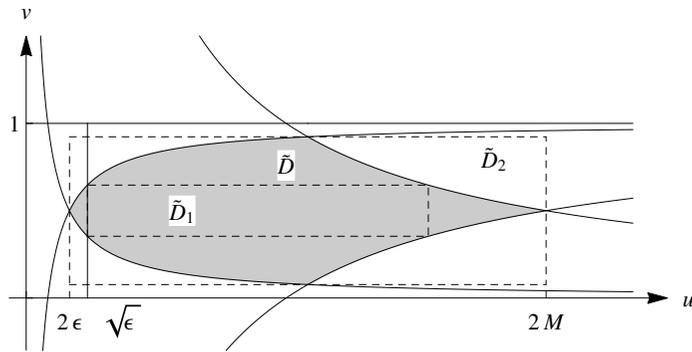


図 7.2 定理 7.17 の証明

証明．正の数 p, q をとり，固定しておく．正の数 $\epsilon < 1/4$ と正の数 $M > 1$ に対して

$$\begin{aligned} I(\epsilon, M) &:= \iint_{D_{\epsilon, M}} e^{-x} x^{p-1} e^{-y} y^{q-1} dx dy \\ &= \left(\int_{\epsilon}^M e^{-x} x^{p-1} dx \right) \left(\int_{\epsilon}^M e^{-y} y^{q-1} dy \right) \quad D_{\epsilon, M} = [\epsilon, M] \times [\epsilon, M] \end{aligned}$$

とおくと，ガンマ関数の定義（例 7.12）から

$$(7.11) \quad \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ M \rightarrow +\infty}} I(\epsilon, M) = \Gamma(p)\Gamma(q).$$

一方，変数変換

$$x = uv, \quad y = u(1-v)$$

をほどこすと， xy 平面の部分集合 $D_{\epsilon, M}$ は uv 平面の部分集合

$$\tilde{D} := \left\{ (u, v) \mid \frac{\epsilon}{u} \leq v \leq \frac{M}{u}, 1 - \frac{M}{u} \leq v \leq 1 - \frac{\epsilon}{u} \right\}$$

と 1 対 1 に対応する（図 7.2）．変数変換のヤコビアンは $\partial(x, y)/\partial(u, v) = -u$ であるから， \tilde{D} 上 $u > 0$ に注意すれば

$$I(\epsilon, M) = \iint_{\tilde{D}} e^{-u} u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} du dv$$

となる．ここで

$$\tilde{D}_1 := \left[\sqrt{\epsilon}, \frac{M}{1-\sqrt{\epsilon}} \right] \times [\sqrt{\epsilon}, 1-\sqrt{\epsilon}], \quad \tilde{D}_2 := [2\epsilon, 2M] \times \left[\frac{\epsilon}{M+\epsilon}, \frac{M}{M+\epsilon} \right]$$

とおくと，図 7.2 のように $\tilde{D}_1 \subset \tilde{D} \subset \tilde{D}_2$ だから，

$$\begin{aligned} I(\epsilon, M) &\leq \iint_{\tilde{D}_2} e^{-u} u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} du dv \\ &= \left(\int_{2\epsilon}^{2M} e^{-u} u^{p+q-1} du \right) \left(\int_{\frac{\epsilon}{M+\epsilon}}^{\frac{M}{M+\epsilon}} v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \right), \\ I(\epsilon, M) &\geq \iint_{\tilde{D}_1} e^{-u} u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} du dv \\ &= \left(\int_{\sqrt{\epsilon}}^{\frac{M}{1-\sqrt{\epsilon}}} e^{-u} u^{p+q-1} du \right) \left(\int_{\sqrt{\epsilon}}^{1-\sqrt{\epsilon}} v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \right). \end{aligned}$$

ここで $\epsilon \rightarrow +0$, $M \rightarrow +\infty$ とすると，2 つの不等式の右辺はともに $\Gamma(p+q)B(p, q)$ に収束するので，結論が得られた． \square

正規分布

確率的に値が定まるような変数を確率変数という．確率変数が特定の値をとるときの確率が指定されているとき，変数の値と確率の対応を確率分布という．

硬貨（いかさまでない）を 10 回投げて表がでた回数を X を確率変数とみなせば， $X = k$ となる確率は ${}_{10}C_k/2^{10}$ であることは高等学校で学んだ．このような分布を二項分布という（ということが高等学校の教科書にもある）．一般に，確率変数 X が値 x_j をとる確率が $p_j (> 0)$ ならば，とりうるすべての値 x_j に関する総和は $\sum p_j = 1$ となる（何かが起こる確率は 1）．ここで，同じ範囲で和をとって

$$\mu := \sum p_j x_j, \quad \sigma^2 := \sum p_j (x_j - \mu)^2$$

とおき μ を X の平均， σ^2 を分散， σ を標準偏差という⁷⁾．

確率変数が連続的な値をとる場合，それが「特定の値をとる」ということは滅多に起こらない．そこで，確率変数の値が「ある範囲」にある場合の確率を指定し，その指定のしかたを確率分布とする．すなわち，任意の区間 (a, b) に対して $a \leq X \leq b$ となる確率 $P_{(a, b)}$ を指定することが確率分布を定めることとする．とくに，この確率が

$$P_{(a, b)} = \int_a^b \rho(x) dx \quad \rho(x) \geq 0$$

と，積分を用いて表されているとき，考えている確率分布の確率密度関数は $\rho(x)$ である，という．確率変数の値がどれかの実数になる確率は 1，任意の区間に対して $P_{(a, b)} \geq 0$ にならなければならないから，密度関数は

$$(7.12) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1, \quad \rho(x) \geq 0$$

⁷⁾ 確率変数：a stochastic variable, a random variable, 確率分布：a probability distribution, 二項分布：the binomial distribution, 平均：the mean, 分散：the variance, 標準偏差：the standard deviation, 確率密度関数：a probability density function.

をみたさなければならぬ。さきに述べた離散的な場合との類推で、確率密度関数が ρ となるような確率分布に対して、

$$\mu := \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x) dx, \quad \sigma^2 := \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \rho(x) dx$$

をそれぞれ平均、分散という。

さて、実数 μ と正の数 σ に対して

$$\rho(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

とおくと、系 7.16 の式 (7.8) は、 ρ が (7.12) をみたしていることを表している。この ρ を確率密度関数にもつような確率分布のことを正規分布という⁸⁾。系 7.16 は、この正規分布の平均、分散がそれぞれ μ, σ^2 であることを表している。

高次元の球の体積

ガンマ関数を用いると、高い次元の球の体積を簡単に表すことができる(問題 5-9 参照)。正の整数 n と実数 R に対して \mathbb{R}^n の半径 R の球(球体)⁹⁾とは

$$B^n(R) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2 \leq R^2\} \subset \mathbb{R}^n$$

のことで、その体積とは、積分

$$V_n(R) := \int \dots \int_{B^n(R)} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

のことである。とくに

$$\alpha_n := V_n(1)$$

とすると、変数変換 $y_j = Rx_j$ ($j = 1, \dots, n$) を行うことにより、 $V^n(R) = R^n \alpha_n$ がわかる。とくに、小学校・中学校・高等学校で $\alpha_2 = \pi, \alpha_3 = \frac{4}{3}\pi$ であることを学んだ。

定理 7.18. $\alpha_n = \frac{\sqrt{\pi^n}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$.

証明. 関数 $f(x_1, \dots, x_n) := e^{-x_1^2 - \dots - x_n^2}$ を考えると、

$$(7.13) \quad \int \dots \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2 - \dots - x_n^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \left(\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \right)^n = \sqrt{\pi}^n.$$

一方、 $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ とすると $f = e^{-r^2}$ となるので、 r から $r + \Delta r$ の区間で f の積分はおよそ

$$\begin{aligned} f(r) \times (\text{半径 } r \text{ から } r + \Delta r \text{ までの球殻の体積}) &= f(r)(V^n(r + \Delta r) - V^n(r)) \\ &= f(r)\alpha_n((r + \Delta r)^n - r^n) = f(r)\alpha_n \cdot nr^{n-1}\Delta r + (\Delta r)^2(\dots) \end{aligned}$$

⁸⁾正規分布: the normal distribution. 正規分布は確率分布の単なる例ではなく、重要な意味をもっている。確率や統計の教科書などで「中心極限定理」を調べてみよ。

⁹⁾球: a ball. 表面だけを表すときは球面 a sphere という語を用いる。

となる(問題 5-7, 第 5 回の体積密度と質量の関係を参照せよ)。 f の \mathbb{R}^n の全体での積分は、この体積の総和だが、 Δr^2 の項は、総和をとって $\Delta r \rightarrow 0$ としたときに 0 になってしまう項なので¹⁰⁾、

$$\int \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_0^{\infty} n\alpha_n e^{-r^2} r^{n-1} dr$$

となる。この右辺の積分は $r^2 = u$ と置換することで、ガンマ関数の定義から

$$n\alpha_n \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-u} u^{\frac{n}{2}-1} du = \frac{n}{2} \alpha_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \alpha_n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right).$$

ここで問題 7-3 を用いた。この式と (7.13) が等しいことから結論が得られる。□

問 題 7

7-1 命題 7.2 を確かめなさい。

7-2 例 7.12 の広義積分 (7.3) が収束することを確かめなさい(注意: この積分は区間の上端も下端も広義積分なので、たとえば $(0, 1]$ での積分と $[1, +\infty)$ での積分の収束を別々に示す必要がある。)

7-3 任意の正の数 s に対して $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ であることを示しなさい。これを用いて、正の整数 n に対して $\Gamma(n) = (n-1)!$ であることを確かめなさい。

7-4 例 7.13 の広義積分が収束することを確かめなさい。

7-5 $[0, +\infty)$ で定義された関数 $f(t)$ に対して

$$(*) \quad \hat{f}(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

で与えられる s の関数 \hat{f} を f のラプラス変換という¹¹⁾。つぎを確かめなさい。

- (1) 関数 $f(t) = 1$ に対して、(*) は $s > 0$ で収束し $\hat{f}(s) = 1/s$ となる。
- (2) 関数 $f(t) = t$ に対して、(*) は $s > 0$ で収束し $\hat{f}(s) = 1/s^2$ となる。
- (3) 関数 $f(t) = t^k$ (k は正の整数) に対して、(*) は $s > 0$ で収束し $\hat{f}(s) = k!/s^{k+1}$ となる。
- (4) 関数 $f(t) = e^{at}$ (a は定数) に対して、(*) は $s > a$ で収束し $\hat{f}(s) = 1/(s-a)$ である。
- (5) 関数 $f(t) = \cos \omega t$ (ω は定数) に対して (*) は $s > 0$ で収束し、 $\hat{f}(s) = s/(s^2 + \omega^2)$ である。
- (6) 関数 $f(t) = \sin \omega t$ (ω は定数) に対して (*) は $s > 0$ で収束し、 $\hat{f}(s) = \omega/(s^2 + \omega^2)$ である。

¹⁰⁾ここでは $r = +\infty$ までの積分を考えるので、この議論は少々不正確。有限の範囲で積分しておいて極限をとるのが正しい。

¹¹⁾一般には s は複素変数と考えるべきだが、ここでは実変数と思うことにする。ラプラス変換は線形常微分方程式を解くのに便利なツールだが、この科目では扱わない。「工業数学」などの授業で学ぶはずである。