位相空間論第一（講義）(MTH.B201)

集合の濃度

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-1

東京工業大学理学院数学系

2024/05/14

Q: 授業内では $\bigcup_{k=1}^{\infty}$ や $\bigcap_{k=1}^{\infty}$ は極限とは関係ないと言っていましたが，$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=1}^{n}$ のように扱うのは間違いなのでしょうか．

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n \right)$$

Q and A

Q: 演習の小テストの問題 $\boxed{2}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, n) = [0,1)$ の証明で, $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, n) \subset [0,1)$ を証明するときに背理法を使いましたが，背理法ではなく，直接証明する方法として何がありますか？

$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, n) \Rightarrow$ すべての n に対して $x \in (-\frac{1}{n}, n)$.

① $x \in (-1, 1)$ $\therefore x < 1$

② すべての n に対して $x > -\frac{1}{n} \Rightarrow x \geq 0$.

$\Rightarrow x \in [0, 1)$.

選択公理

X: 普遍集合；Λ: 集合；$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$：$X$ の集合族

定義

$\neq\emptyset$

$$f \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{f : \Lambda \to X\,;\, \text{各 } \lambda\in\Lambda \text{ に対して } f(\lambda)\in A_\lambda\}$$

公理 (選択公理 the axiom of choice)

すべての λ に対して $A_\lambda \neq \emptyset$ ならば

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$$

Q and A

Q: 公理は証明せずに認めるものとして扱われますが，公理として認められる基準は何ですか？

命題関数

Q: 以前にトートロジーについて紹介がありましたが公理とトートロジーはどのような違いがありますか．（公理と同値なトートロジーがあったりするのでしょうか）ゲームのルール

同語反復

Q and A

Q: 選択公理の "同時にとり出す" というのがよく分からない.
他の元のとり方によらないということなのですか？

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (1, 2)$$

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \ni f \qquad f(\lambda) \in A_\lambda$$

選択公理の応用

任意の∞集合は"ℕ より大きい"

定理 (命題 7.18)

無限集合 X に対して，$\mathbb{N}$ から X への単射が存在する．

定義 (有限集合・無限集合；テキスト 6 ページ)

集合 A が<u>有限集合</u>であるとはある正の整数 n が存在して，
$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ と（重複なく）書けることである．
有限集合でない集合を<u>無限集合</u>という．

X: 無限集合 $(\neq \phi)$

べき集合

$\mathcal{P} := \{ A \subsetneq X \} = 2^X \setminus X$; $\phi \in \mathcal{P} \therefore \mathcal{P} \neq \phi$

$A \in \mathcal{P}$ に対して $B_A := A^c = X \setminus A$ $\neq \phi$ として

集合族 $\{B_A\}_{A \in \mathcal{P}}$ を考える.

✓ $\prod_{A \in \mathcal{P}} B_A \ni f$ をとる ← 選択公理.

・$f: \mathcal{P} \longrightarrow X$　　$f(A) \in B_A = A^c$

$x_1 = f(\phi) \in \phi^c = X$

$x_2 = f(\{x_1\}) \in X \setminus \{x_1\}$

$x_3 = f(\{x_1, x_2\}) \in X \setminus \{x_1, x_2\}$

$(x_1 \ x_2 \ x_3 \ \sim$ 全て異なる $)$ と列をとることができる

帰納的に

全部違う.

集合の濃度

集合の元の個数の測り方、

あるひとつの

定義 (テキスト 51 ページ)

集合 X, Y が対等 $\Leftrightarrow$ 全単射 $X \to Y$ が存在.

濃度が同じ

cardinality

- $|X| = |Y| \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} X$ と Y が対等
- $|X| = n \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} X$ と $\{1, \ldots, n\}$ が対等
- $|\varnothing| := 0$

定義

$|X| \leq |Y| \Leftrightarrow$ 単射 $X \to Y$ が存在.

濃度