位相空間論第一（講義）(MTH.B201)

集合の濃度

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-1

東京工業大学理学院数学系

2024/05/14

可算濃度

$\not\exists A \to \mathbb{N}$ 全射　　$\exists A \to \mathbb{N}$ 単射.

- A：有限集合 ⇒ $|A| \neq |\mathbb{N}|$ かつ $|A| \leqq |\mathbb{N}|$.
- X：無限集合 ⇒ $|\mathbb{N}| \leqq |X|$.（命題 7.18）　$\exists \mathbb{N} \to X$ 単射

$|\mathbb{N}|$ は無限集合の最小の濃度

定義

- $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$：可算濃度　countable
- X が高々可算集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} |X| \leqq \aleph_0$　at most countable

有限 or 可算

$\aleph_0$　aleph　zero
null

(at least)　可算集合
$(a_1\ a_2\ a_3 \cdots)$

例

- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$

$\mathbb{N} \setminus \{1\} \simeq X_1 \qquad |\mathbb{N}| = |X_1|$

$\mathbb{N} \ni x \longmapsto x+1 \in X_1$

$\{2n;\ n \in \mathbb{N}\} = X_2 \qquad |\mathbb{N}| = |X_2|$

$\mathbb{N} \ni x \longmapsto 2x \in X_2$

$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3 & \cdots \end{array}$$

$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

($|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$ 次回)

$\{x \in \mathbb{Q} \,;\, x > 0\} = \mathbb{Q}_+$ $\boxed{|\mathbb{Q}_+| = |\mathbb{N}|}$

	1	2	3	4	5	⋯
1	1	1/2	1/3	1/4	1/5	
2	2/1	~~2/2~~	2/3	2/4	2/5	
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	
5	⋮					
⋮						

$\mathbb{Q}_+ = \{q_1, q_2, \cdots\}$

$\mathbb{Q} = \{0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, \cdots\}$

ベルンシュタインの定理

$\exists X \to Y$: 単射　　$\exists Y \to X$: 単射

定理

定理 8.8 $|X| \leqq |Y|$ かつ $|Y| \leqq |X| \Rightarrow |X| = |Y|$.

例

$X = \mathbb{N}$

$Y = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

例 8.10 $|\mathbb{Z}^2| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

$$f : \mathbb{N} \ni x \longmapsto (x, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

単射

$$g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ni (x, y) \longmapsto 2^{|x|} \cdot 3^{|y|} \cdot 5^{\mathrm{sgn}(x)+1} \cdot 7^{\mathrm{sgn}(y)+1} \in \mathbb{N}$$

単射

$$\left(\mathrm{sgn}\, x = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \right)$$

$2^{|x'|} \cdot 3^{|y'|} \cdot 5^{\mathrm{sgn}\, x' + 1} \cdot 7^{\mathrm{sgn}\, y' + 1}$

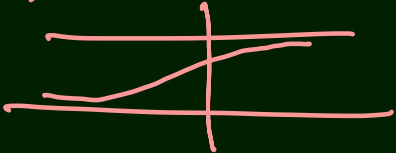
$|x| = |x'|$

$|y| = |y'|$　$\Rightarrow$　$x = x'$, $y = y'$

例

$$|\mathbb{R}| = |(0,1)| = |[0,1]|$$

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}+1\right) \in (0,1)$$



$$\left(\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & (0,1) \\ x & \longmapsto & \frac{1}{4}x+\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Bernstein の定理 の証明

$f: X \to Y$: 単射 $\quad g: Y \to X$: 単射

$Y_1 = Y \setminus f(X) \neq \phi \quad X_1 = g(Y_1)$

$Y_2 = f(X_1) \quad X_2 = g(Y_2)$

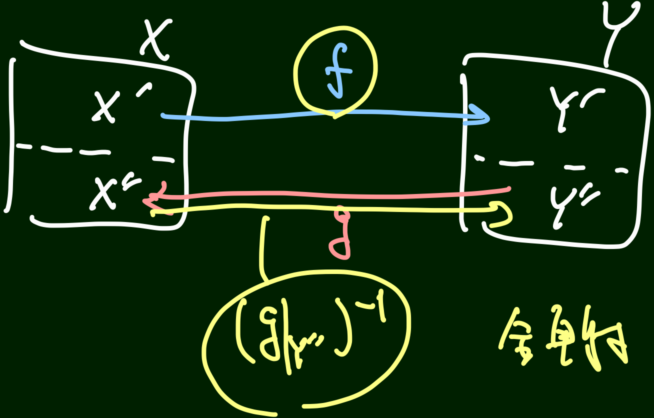
$\vdots \quad \vdots$

$X' = \bigcup X_k \quad Y' = \bigcup Y_k$

$X'' = X \setminus X' \quad Y'' = Y \setminus Y'$

$f|_{X'} : X' \to Y'$: 全単射 $\quad f(X') = Y'$

$g|_{Y''} : Y'' \to X''$: 〃



全単射

冪集合の濃度

$|X| < |Y| \overset{\text{def}}{\iff} |X| \leq |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$

定理 (定理 8.15)

$|X| < |2^X|$

次回

本日の課題の提出締切は

2024 年 05 月 16 日（木曜日）07:00 JST

今回が最後の課題です