位相空間論第一（講義）(MTH.B201)

連続の濃度

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-1

東京工業大学理学院数学系

2024/05/21

集合の濃度

定義

- $|X| = |Y| \overset{\text{def}}{\iff}$ 全単射 $X \to Y$ が存在
- $|X| \leqq |Y| \overset{\text{def}}{\iff}$ 単射 $X \to Y$ が存在 ⇔ 全射 $Y \to X$ が存在
- $|X| < |Y| \overset{\text{def}}{\iff} |X| \leqq |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$

∵ $f : Y \to X$ 全射　$S_x := f^{-1}(\{x\}) \subset Y$, $x \in X$, $S_x \neq \emptyset$

∴ $\prod_{x \in X} \underset{\subset Y}{S_x} = \emptyset$ 選択公理

⇓

$g : X \to Y$　$g(x) \in S_x$ for all x

これは単射 ∵ $S_x \cap S_y = \emptyset$ when $x \neq y$

Q and A

Q: 集合の濃度を定義するときに，たとえば集合 A, B について $A \to B$ の単射性ではなく逆向きの写像について $B \to A$ 全射性を言えるかで定義することもできると思うのですが，後者ではなく前者を採用するのはなぜなのでしょうか？

A: 系 7.16 ですね.

単射性の方が示しやすい (?)

Q and A

× $|X| \leqq |Y|$ ⟺ $|X| < |Y|$ or $|X| = |Y|$

Q: ベルンシュタインの定理で，$|X| \leqq |Y|$ かつ $|X| \geqq |Y|$ ならば $|X| = |Y|$ というのは不等式から明らかなように思えるが，そうでないのは，集合の濃度が等しいというのが同値関係であったり，濃度の大小が数の大小と違い順序（原文ママ：違う順序？）だったりするからなのか．

定理 (定理 8.8; ベルンシュタインの定理)

$|X| \leqq |Y|$ かつ $|Y| \leqq |X| \Rightarrow |X| = |Y|$.

ベルンシュタインの定理の証明

命題

(全射でないとして一般性を失わない)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$: 単射 $\Rightarrow$ 全単射 $h\colon X \to Y$ が存在する.

- $Y_1 := Y \setminus f(X)$ $(\neq \varnothing)$
- $X_1 := g(Y_1)$, $Y_2 := f(X_1)$, $X_2 := g(Y_2)$, ..., $X_k := g(Y_k)$, $Y_{k+1} := f(X_k)$.
- $X' := \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$, $Y' := \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j$ $\subset Y$
- $X'' := X \setminus X'$, $Y'' := Y \setminus Y'$.

$\begin{cases} X' \Leftarrow Y' \\ X'' \to Y'' \end{cases}$ 全射

$\Rightarrow$

$$f(X'') = Y'', \quad g(Y') = X'.$$

テストとフォローしよう

だから $g_1\colon Y' \ni y \mapsto g(y) \in X'$ は全単射. そこで

$X' \cap X'' = \phi$

$\Rightarrow$ 全単射

$$h(x) = \begin{cases} (g_1)^{-1}(x) & (y \in X'), \\ f(x) & (x \in X''), \end{cases}$$

とすればよい.

$$g(Y') = g\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j\right)$$

$$= \bigcup_{j=1}^{\infty} g(Y_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j = X'$$

$$f(X'') = f(X \setminus X')$$

$$= f(X) \setminus f(X') \quad \because f \text{ が単射}$$

$$= (Y \setminus Y_1) \setminus f\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j\right)$$

$$= (Y \setminus Y_1) \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} f(X_j)$$

$$= (Y \setminus Y_1) \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_{j+1}$$

$$= \cdots$$

Q and A

Q: 構義（原文ママ：講義？）では様々な集合について $\mathbb{N}$ との濃度を比較したが，一般に空でない集合 A, B について，$|A| < |B|$，$|A| = |B|$，$|A| > |B|$ のいずれか 1 つの関係は成り立つのか．

A: 濃度の比較定理（定理 12.8） Yes.

2Q

全順序集合

半順序集合

Q and A

Q: 非可算集合は可算集合より濃度が大きいですが，非可算集合より濃度が大きい集合が存在しますか？ また，そのような集合が存在するとしたら，「濃度が等しいである」の証明は，全単射が存在することだけで証明できますか？

冪集合の濃度

定理 (定理 8.15)

$|X| < |2^X|$

$2^X =$ Xの冪集合

$= \{$Xの部分集合$\}$

- $X \ni x \mapsto \{x\} \in 2^X$: 単射 $\quad |X| \leqq |2^X|$
- $f : X \to 2^X$ が単射ならば全射じゃない

$\boxed{E := \{x \in X \,;\, \underset{X}{x} \notin \underset{2^X}{f(x)}\} \in 2^X}$ $\quad \boxed{E \notin f(X)}$

とすると
- $a \in X$ が $a \in f(a) \to f(a) \neq E$
- $a \in X$ が $a \notin f(a) \to a \in E \quad \therefore f(a) \neq E$