位相空間論第一（講義）(MTH.B201)

連続の濃度

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-1

東京工業大学理学院数学系

2024/05/21

可算濃度

- A：有限集合 $\Rightarrow |A| \neq |\mathbb{N}|$ かつ $|A| \lneqq |\mathbb{N}| = \aleph_0$.
- X：無限集合 $\Rightarrow |\mathbb{N}| \leqq |X|$.（命題 7.18）

Xが無限集合 $\Rightarrow \exists f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{単射}]{} X$

定義

- $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$：可算濃度 countable
- X が高々可算集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} |X| \leqq \aleph_0$ at most countable
- X が 非可算集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} |X| > \aleph_0$

uncountable

連続の濃度

事実

$|\mathbb{R}| = |(0,1)| = |2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}^2| > \aleph_0$

定義

$\aleph := |\mathbb{R}|$（連続の濃度）

$\aleph > \aleph_0$

(命題 9.1)

$$\begin{array}{rcl} f : (0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \in & & \\ x & \longmapsto & \tan\left((1-x)\left(-\frac{\pi}{2}\right) + x \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\ (\text{全単射}) & & = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2} \right) \end{array}$$

$|(0,1)| = |2^{\mathbb{N}}| = \aleph \neq \aleph_0$

$|[0,1]|$ (定理 9.3)

χ chi τεχ $\mathrm{T_EX}$

定義

$S \subset X$ に対して S の<u>特性関数</u> $\chi_S\colon X \to \{0,1\}$ を次で定める．

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & (x \in S) \\ 0 & (x \notin S) \end{cases}$$

定理 (定理 7.14)

全射 $f\colon X \to Y$ が存在するならば，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ となる単射 $g\colon Y \to X$ が存在する．

$S \in 2^{\mathbb{N}}$

· $f(S) = 0.a_1a_2\cdots$ 10進 $a_j = \chi_S(j) \in \{0,1\}$

$f: 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ ← [illegible] $[0,1]$

単射

· $g(S) = 0.b_1b_2\cdots$ 2進 $b_j = \chi_S(j)$

全射 ∴ $\exists h: [0,1] \to 2^{\mathbb{N}}$

単射

· $[0,1]$

$|(0,1)| > \aleph_0$（対角線論法）

$(0,1)$ が可算だとする

$$a_1 = 0.\alpha_1^1\,\alpha_1^2\,\alpha_1^3 \cdots$$

$$a_2 = 0.\alpha_2^1\,\alpha_2^2\,\alpha_2^3 \cdots$$

$$a_3 = 0.\alpha_3^1\,\alpha_3^2\,\alpha_3^3 \cdots$$

$$\vdots$$

$b \neq a_j$

$$b = 0.\beta^1\,\beta^2\,\beta^3 \cdots$$

$$\beta^j = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha_j^j \neq 0 \\ 1 & \text{if } \alpha_j^j = 0 \end{cases}$$

無理数と超越数

0.101001000100001 ……

- <u>無理数</u>：有理数でない実数. ← "非可算無限個"
- <u>超越数</u>：代数的数でない実数.

定義

有限個

実数 x が代数的数であるとは，整数を係数とする多項式の根となることである.

可算無限個 $\sqrt{2}$: $x^2 - 2 = 0$

・可算無限

$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2|$

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$$

複素数全体
complex numbers

命題

無理数全体（超越数全体）の集合の濃度は $\aleph$ である.

命題 (命題 9.13)

Λ : 可算集合, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: 可算集合からなる集合族

$\Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は可算集合

∃? X s.t

$$\aleph_0 < |X| < \aleph$$

連続体仮説

独立

・公理的集合論 $\longleftrightarrow$ 連続体仮説

(neutral)

ご聴講ありがとうございました.

本日の課題はありません.