2024 年 05 月 21 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

位相空間論第一（講義）(MTH.B201) 講義資料 7

■お知らせ

- 9 名の方から課題提出がありました．T2SCHOLA にて返却しておりますのでご確認ください．
- **授業学修アンケート**にご協力ください．T2SCHOLA のトピック「一般」の冒頭においてあります．
- 前回予告したとおり，来週 **5 月 28 日**に定期試験を行います．お忘れなきよう．
- 位相空間論第一の講義は今回が最終回です．ご聴講ありがとうございました．

■前回までの訂正

- T2SCHOLA の提出箱の締切が先週の日付になっていました．提出は問題なく行われた模様です．

■授業に関する御意見

- 少し授業内容と外れる質問ですが，ヒルベルトの無限ホテルの例に登場した，無限人の客を乗せた無限大（原文ママ：無限台？）のバスをホテルに集約する方法は，$N \times N \to N$（原文ママ：$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$？）の写像ということでしょうか？
  山田のコメント：多分そう．
- テストの予告プリントが面白かったです．　**山田のコメント：**Thanks.

■質問と回答

質問 1： 黒板 B にて，集合の濃度は「無限集合の元の個数のあるひとつの測り方」とありますが，無限集合の元の個数を測る他の方法とは何でしょうか．

お答え： 様々な構造が入っていると，それに即した測り方ができる．線型空間の次元などはその例（と講義で述べた）．

質問 2： $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ が授業で分かったが，$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$ ということも教わったが，感覚として有理数の稠密性から，$\mathbb{R}$ の間に $\mathbb{Q}$ が必ずあるため，$\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ と同程度の濃度だと思っていたため，どうしてダメなのかが気になった．

お答え： 気になっただけ？ 稠密性は集合の性質ではなく距離空間という構造の性質なので，数え方が異なるのは自然．

質問 3： 無限集合を「有限集合でない集合」と定義していましたが，「元が無数にある集合」と定義しても問題ないですか？　**お答え：**「無数」の定義は？

質問 4： 無限コの交わらない可算集合の和集合は可算集合になりますか．　**お答え：**無限コとは？

質問 5： $\aleph_0$ を可算の濃度というとのことですが，無限集合なのになぜ可算というのですか．

お答え： $\mathbb{N}$ と対応づけることを “数える” というからだと思います．

質問 6： 実際に $|(0,1)| = |[0,1]|$ などを証明するとき，どのように考えて写像をつくるのか聞きたい．時間がかかってしまう．　**お答え：**はい．時間をかけて下さい．

質問 7： 例えば，$g(m,n) = n + \frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)$ で $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を考えるとき，（山田注：図は省略）のように順番にとればよいとよく聞くが，実際に証明するとなると，どのようなことをいえばよいのか．

お答え： 何を証明するのか．

質問 8： ベルンシュタインの定理で，$|X| \leqq |Y|$ かつ $|X| \geqq |Y|$ ならば $|X| = |Y|$ というのは不等式から明らかなように思えるが，そうでないのは，集合の濃度が等しいというのが同値関係であったり，濃度の大小が数の大小と違い順序（原文ママ：違う順序？）だったりするからなのか．　**お答え：**不等号の定義は数のものと違うので．

質問 9： 構義（原文ママ：講義？）では様々な集合について $\mathbb{N}$ との濃度を比較したが，一般に空でない集合 A, B について，$|A| < |B|$，$|A| = |B|$，$|A| > |B|$ のいずれか 1 つの関係は成り立つのか．

お答え： はい．濃度の比較定理といいます（定理 12.8）．

質問 10： 非可算集合は可算集合より濃度が大きいですが，非可算集合より濃度が大きい集合が存在しますか？ また，そのような集合が存在するとしたら，「濃度が等しいである」の証明は，全単射が存在することだけで証明できますか？　**お答え：**濃度が等しいの定義は？

質問 11： $|2^N|$ と $|R|$（原文ママ：$|2^{\mathbb{N}}|$ と $|\mathbb{R}|$？）の大小比較は可能でしょうか．　**お答え：**定理 9.3.

質問 12： 集合の濃度を定義するときに，たとえば集合 A, B について $A \to B$ の単射性ではなく逆向きの写像について $B \to A$ 全射性を言えるかで定義することもできると思うのですが，後者ではなく前者を採用するのはなぜなのでしょうか？　**お答え：**系 7.16 ですね．単射性と全射性を示すのはどちらが易しいでしょう．