集合 $x \in A$ $x \notin A$

・包含
・写像
・濃度の比較

位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

順序集合

(構造)

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2

東京工業大学理学院数学系

2024/06/11

関係

X：集合

定義 (テキスト 30 ページ)

X の関係とは $X \times X$ の部分集合のことである.

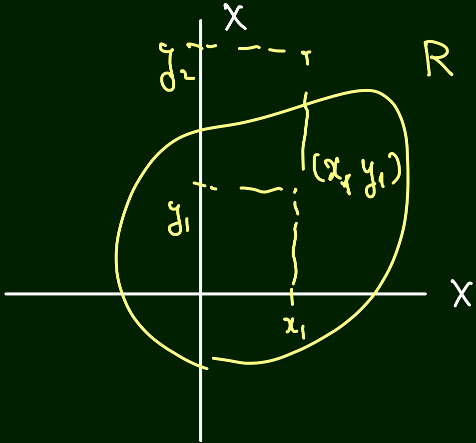
$R \subset X \times X$：関係

$$x \sim_R y \iff (x, y) \in R \qquad x, y \text{ は } R \text{ 関係にある}$$

例 (同値関係：定義 5.16)

関係 $\sim$ が同値関係:

- $x \sim x$
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
- $x \sim y$ and $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

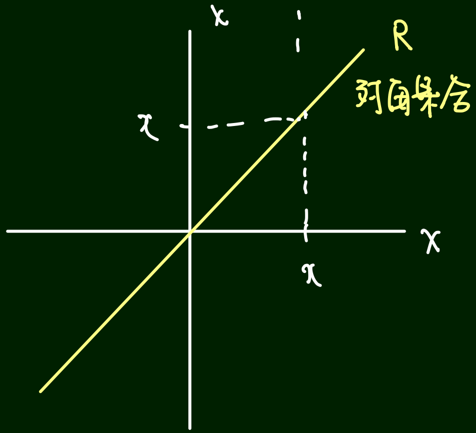


$$x \sim_R y \iff (x,y) \in R$$

$$x_1 \sim_R y_1$$

$$x_1 \not\sim_R y_2$$

$$R = \{(x, x) \,;\, x \in X\}$$



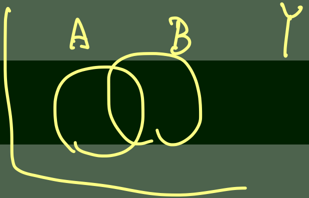
$$\left(x \sim_R y \iff y = x \right)$$

自明

順序関係

$\leq \quad \leqq$

X : 集合, $\leqq$: 関係



定義 (定義 10.1)

関係 $\leqq$ が X の順序関係 $\Leftrightarrow$ 任意の $x, y, z \in X$ に対して次が成り立つ：

$\forall x, y, z \in X$

- $x \leqq x$
- $x \leqq y$ and $y \leqq x \Rightarrow \boxed{x = y}$
- $x \leqq y$ and $y \leqq z \Rightarrow x \leqq z$

$A \subset B$

$\Leftrightarrow$「$a \in A \Rightarrow a \in B$」

例 : $X = 2^Y$ = Yの部分集合全体の集合, 関係 $\subset$ 順序

$A, B \in X$; $A \subset B$

$A \subset A$

$A \subset B \quad B \subset A \Rightarrow A = B$

$A \subset B \quad B \subset C \rightarrow A \subset C$

$A \subset B$

$B \subset A$

のどちらも成立しないこともある

・ $X = \mathbb{R}$　　$x \leqq y$: 通常の大小関係

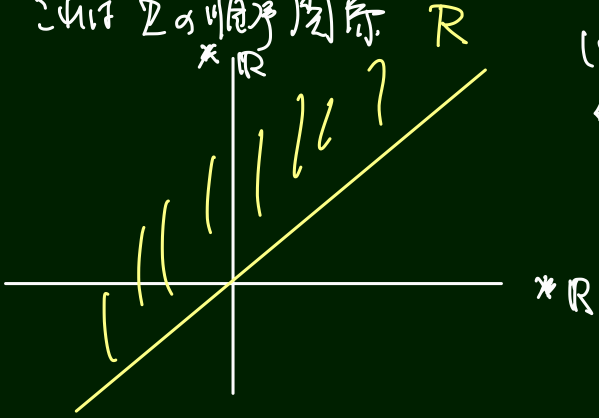
$\leqq$: 順序関係

・ $Y = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ の大小関係を $Y = \mathbb{Z}$ に制限すると

これは $\mathbb{Z}$ の順序関係

・



$(x, y) \in R$

$\Leftrightarrow x \leqq y$

順序関係 "構造"

$(X, \leq)$: 順序集合

定義 (定義 10.1)

$\leq$ が $\boxed{\text{全順序}}$

$\Leftrightarrow$ 任意の $x, y \in X$ に対して $\underline{x \leq y \text{ または } y \leq x}$.

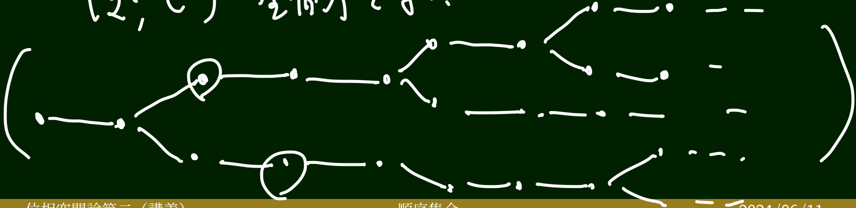
$\boxed{x < y} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \underline{x \leq y}$ and $\underline{x \neq y}$.

$(\mathbb{R}, \leq)$: 全順序集合

例 : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

$(2^X, \subset)$ 全順序でない

全順序でない



$\mathbb{C} = \{ x + \sqrt{-1}\, y \ ; \ x, y \in \mathbb{R} \}$ the set of complex numbers

$= \mathbb{R}^2$

Thm $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$

$\therefore \ \exists \ \varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ 全単射

$\mathbb{C}$ には全順序が入る.

$\because$ $z, w \in \mathbb{C}$ に対して $z \leq w \overset{\text{def}}{\iff} \varphi(z) \leq \varphi(w)$

$\mathbb{C}$

辞書式順序：$x+\sqrt{-1}y \preceq s+\sqrt{-1}t \Leftrightarrow$ ・$x<s$ (例 10.8)

・$x=s,\ y\leqq t$

複素数に大小関係はない

よい全順序は入らない。

+, −, ×, ÷ がしかるべき性質をみたすように def されている

・$\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) には「体」の構造が入る。

a field　Körper

・体の構造に適合した順序。

(中学校で学ぶ不等式の性質。)

順序体

・ $\mathbb{C}$には順序体の構造が入らない　(ℝの順序と両立して.)

$\because$ もし $\leqq$ が入ったとすると

$\sqrt{-1} > 0$　or　$\sqrt{-1} < 0$

$\sqrt{-1}\sqrt{-1} > 0 \cdot \sqrt{-1}$　　$\sqrt{-1}\sqrt{-1} > 0 \cdot \sqrt{-1}$

$-1 > 0$　　$-1 > 0$

$\cancel{x^2 + 1 \leqq 0}$　　$\cancel{-i \leqq x \leqq i}$

順序同型

構造を保つ写像

$(X, \leqq_X)$, $(Y, \leqq_Y)$：順序集合

$f\colon X \to Y$

定義 (定義 10.9)

- f が順序準同型 $\Leftrightarrow$ "$x_1 \leqq_X x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqq_Y f(x_2)$"
- f が順序同型 $\Leftrightarrow$ f が順序準同型全単射で, f^{-1} も順序準同型

例：$(\mathbb{C}, \preceq) \ni x + \sqrt{-1}y \mapsto x \in (\mathbb{R}, \leqq)$

12 時 00 分 に再開します.

______時______分 に再開します.