

位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

順序集合

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

<http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2>

東京工業大学理学院数学系

2024/06/11

関係

X : 集合

定義 (テキスト 30 ページ)

X の関係とは $X \times X$ の部分集合のことである.

$R \subset X \times X$: 関係

$$x \sim_R y \quad \iff \quad (x, y) \in R \quad x, y \text{ は } R \text{ 関係にある}$$

例 (同値関係 : 定義 5.16)

関係 \sim が同値関係:

- ▶ $x \sim x$
- ▶ $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
- ▶ $x \sim y$ and $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

順序関係

X : 集合, \leq : 関係

定義 (定義 10.1)

関係 \leq が X の 順序関係 \Leftrightarrow 任意の $x, y, z \in X$ に対して次が成り立つ:

- ▶ $x \leq x$
- ▶ $x \leq y$ and $y \leq x \Rightarrow x = y$
- ▶ $x \leq y$ and $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

例: $X = 2^Y$

順序関係

(X, \leq) : 順序集合

定義 (定義 10.1)

\leq が 全順序

\Leftrightarrow 任意の $x, y \in X$ に対して $x \leq y$ または $y \leq x$.

$x < y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \leq y \text{ and } x \neq y.$

例 : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

C

辭書式順序： $x + \sqrt{-1}y \preceq s + \sqrt{-1}t \Leftrightarrow$ (例 10.8)

順序同型

$(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)$: 順序集合

$f: X \rightarrow Y$

定義 (定義 10.9)

- ▶ f が 順序準同型 \Leftrightarrow “ $x_1 \leq_X x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq_Y f(x_2)$ ”
- ▶ f が 順序同型 $\Leftrightarrow f$ が順序準同型全単射で, f^{-1} も順序準同型

例 : $(\mathbb{C}, \preceq) \ni x + \sqrt{-1}y \mapsto x \in (\mathbb{R}, \leq)$