位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

順序集合

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2

東京工業大学理学院数学系

2024/06/11

最大元・最小元

$(X, \leqq)$：順序集合；$S \subset X,\ \ S \neq \varnothing$

事実

S は “$\leqq$ の S への制限”により順序集合となる．

定義 (定義 10.14)

$s \in S$ が S の<u>最小元</u> $\Leftrightarrow$ 任意の $t \in S$ に対して $s \leqq t$.
$s \in S$ が S の<u>最大元</u> $\Leftrightarrow$ 任意の $t \in S$ に対して $t \leqq s$.

$s = \min S \Leftrightarrow s$ は S の最小元
$s = \max S \Leftrightarrow s$ は S の最大元

最大元・最小元

S_1 は最大元をもたない

例：

- $X = \mathbb{R}$; $S_1 := \{x \in \mathbb{R}\,;\, x^2 < 2\}$

  $\sqrt{2}$: S_1 の最大元でない $\because$ $\sqrt{2} \notin S_1$

- $X = \mathbb{R}$; $S_2 := \{x \in \mathbb{R}\,;\, x^2 \leqq 2\}$

  $\sqrt{2}$: S_2 の最大元である

- $X = \mathbb{R}$; $S_3 := \{x \in \mathbb{Q}\,;\, x^2 \leqq 2\}$

  $\sqrt{2}$: S_3 の最大元でない $\because$ $\sqrt{2} \in S_3$

整列集合

ordered set

$(X, \leq)$: 順序集合

定義 (定義 10.17)

$(X, \leq)$ が<u>整列集合</u>

$\Leftrightarrow$ X の任意の空でない部分集合は最小元をもつ.

$\underline{\mathbb{N} \supset A} \Rightarrow \exists \min A$ (!)

例 : $\mathbb{N}$ 例 : $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

整列集合でない

($\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ 自体が最小元をもたない)

命題 (命題 10.18)

整列集合 $\Rightarrow$ 全順序集合

$\because$ $\{a, b\}$ の最小元を a とすると $a \leq b$.

整列可能定理（定理 10.21）

$\exists$ 整列順序

極大元・極小元

$(X, \leqq)$：順序集合

定義 (定義 10.24)

- $a \in X$ が X の<u>極大元</u>
  $\Leftrightarrow a < x$ をみたす $x \in X$ が存在しない.
- $b \in X$ が X の<u>極小元</u>
  $\Leftrightarrow x < b$ をみたす $x \in X$ が存在しない.

上界・下界・上限・下限

$(X, \leqq)$：順序集合；$A \subset X$

定義 (定義 10.27)

- $\xi \in X$ が A の<u>上界</u> $\Leftrightarrow$ 任意の $a \in A$ に対して $a \leqq \xi$
- $\xi \in X$ が A の<u>下界</u> $\Leftrightarrow$ 任意の $a \in A$ に対して $\xi \leqq a$

定義 (定義 10.29)

- $\sup A := \min\{A$ の上界$\}$：A の<u>上限</u>
- $\inf A := \max\{A$ の下界$\}$：A の<u>下限</u>

ツォルンの補題（次回予告）

選択公理

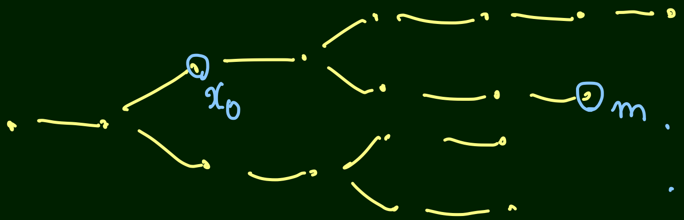
定義 inductive

$(X, \leqq)$ が帰納的 $\Leftrightarrow$ 任意の空でない全順序部分集合が上に有界

定理 (ツォルンの補題；定理 11.1) Zorn's lemma

X：帰納的順序集合；$x_0 \in X$

$\Rightarrow$ X の極大元 m で $x_0 \leqq m$ となるものが存在する



・整列可能

・濃度比較

本日の課題の提出締切は

2024 年 06 月 13 日（木曜日）07:00 JST