

位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

ツォルンの補題

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

`http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2`

東京工業大学理学院数学系

2024/06/18

ツォルンの補題

定理 (ツォルンの補題; 定理 11.1)

X : 帰納的順序集合; $x_0 \in X$

$\Rightarrow X$ の極大元 m で $x_0 \leq m$ となるものが存在する



(X, \leq) : 順序集合

- ▶ X が帰納的順序集合: 任意の全順序部分集合が上に有界.
- ▶ $A (\subset X)$ が上に有界: A の上界が存在する.
- ▶ $\xi \in X$ が $A (\subset X)$ の上界 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $a \in A$ に対して $a \leq \xi$.
- ▶ a が X の極大元: $a < x$ となる $x \in X$ が存在しない.

整列集合

(X, \leq) : 順序集合

定義 (定義 10.17)

(X, \leq) が 整列集合

$\Leftrightarrow X$ の任意の空でない部分集合は 最小元 をもつ.

\Rightarrow 全順序集合

\odot $a, b \in X$ のとき $\min\{a, b\} = a$
 $\forall a \leq b, b \leq a$

▶ a が $A (C X)$ の 最小元 ($a = \min A$)

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \in A$ & すべての $x \in A$ に対して $a \leq x$.

\mathbb{N} : 正の整数全体 整列集合

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$: 整列集合ではない

$\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0\}$ $\mathbb{R}_+ \dots$

整列集合の比較定理

(X, \leq) : 整列集合 ; $a \in X$



$$X_a := \{x \in X \mid x < a\}$$

(X の a -切片)

定理 (定理 11.12)

整列集合 X, Y は次のいずれかを唯一つ満たす :

1. X, Y は順序同型,
2. X はある Y_y ($y \in Y$) に順序同型,
3. Y はある X_x ($x \in X$) に順序同型.

(X, \leq) : 整列集合 ; $x_0 := \min X$

命題 (超限帰納法 ; 命題 10.22)

$p(x)$: $x \in X$ に関する命題

1. X の最小元 x_0 に対して $p(x_0)$ は真. Base Step
2. $x \in X \setminus \{x_0\}$ を固定するとき Step

$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{y < x} \text{ なる } \underline{\text{任意の } y} \text{ に対して } \underline{p(y)} \text{ が真} \Rightarrow \underline{p(x)} \text{ も真 } (*x) \end{array} \right\}$

が成り立つ.

このとき、任意の $x \in X$ に対して $\textcircled{p(x)}$ は真.

ツォルンの補題の証明1

定理 (ツォルンの補題; 定理 11.1)

X : 帰納的順序集合; $x_0 \in X$

$\Rightarrow X$ の極大元 m で $x_0 \leq m$ となるものが存在する



$S \in \Lambda$ は全順序集合
 $\Rightarrow S$ の上界が存在.

$\Lambda := \{S \subset X; S \text{ は } x_0 \text{ を最小元とする整列部分集合}\}$

$S \in \Lambda$ $S^+ := \{x \in X; x \text{ は } S \text{ の上界}\}$

$\Lambda \neq \emptyset$ $\odot \{x_0\} \in \Lambda$

主張

1つだけ

$S^+ \setminus S = \emptyset$ なる $S \in \Lambda$ が存在する

$\Rightarrow x_S \in S^+$ は極大元

ツォルンの補題の証明2

定理 (ツォルンの補題; 定理 11.1)

X : 帰納的順序集合; $x_0 \in X$

$\Rightarrow X$ の極大元 m で $x_0 \leq m$ となるものが存在する

$\Lambda := \{S \subset X; S \text{ は } x_0 \text{ を最小元とする整列部分集合}\}$

$S^+ := \{x \in X; x \text{ は } S \text{ の上界}\}$

假定

- ▶ すべての $S \in \Lambda$ に対して $S^+ \setminus S \neq \emptyset$
- ▶ X に極大元が存在しない。 (背理法)

S に含まれない上界が
存在する。

11 時 40 分に再開します。