位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

ツォルンの補題

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2

東京工業大学理学院数学系

2024/06/18

ツォルンの補題

定理 (ツォルンの補題；定理 11.1)

X：帰納的順序集合；$x_0 \in X$

$\Rightarrow X$ の極大元 m で $x_0 \leqq m$ となるものが存在する

$(X, \leqq)$：順序集合

- X が帰納的順序集合：任意の全順序部分集合が上に有界.
- A $(\subset X)$ が上に有界：A の上界が存在する.
- $\xi \in X$ が A $(\subset X)$ の上界 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $a \in A$ に対して $a \leqq \xi$.
- a が X の極大元：$a < x$ となる $x \in X$ が存在しない.

整列集合

$(X, \leqq)$：順序集合

定義 (定義 10.17)

$(X, \leqq)$ が<u>整列集合</u>
$\Leftrightarrow X$ の任意の空でない部分集合は最小元をもつ.

- a が A $(\subset X)$ の<u>最小元</u>（$a = \min A$）
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \in A$ & すべての $x \in A$ に対して $a \leqq x$.

整列集合の比較定理

$(X, \leqq)$：整列集合；$a \in X$

$$X_a := \{x \in X \quad x < a\} \qquad (X \text{ の } a\text{-切片})$$

定理 (定理 11.12)

整列集合 X, Y は次のいずれかを唯一つ満たす：

1. X, Y は順序同型,
2. X はある Y_y（$y \in Y$）に順序同型,
3. Y はある X_x（$x \in X$）に順序同型.

超限帰納法

$(X, \leqq)$：整列集合；$x_0 := \min X$

命題 (超限帰納法；命題 10.22)

$p(x)$: $x \in X$ に関する命題.

1. X の最小元 x_0 に対して $p(x_0)$ は真.
2. $x \in X \setminus \{x_0\}$ を固定するとき

$$y < x \text{ なる任意の } y \text{ に対して } p(y) \text{ が真} \Rightarrow p(x) \text{ も真} \quad (*_x)$$

   が成り立つ.

このとき，任意の $x \in X$ に対して $p(x)$ は真.

ツォルンの補題の証明 1

定理 (ツォルンの補題；定理 11.1)

X：帰納的順序集合；$x_0 \in X$

⇒ X の極大元 m で $x_0 \leqq m$ となるものが存在する

$$\Lambda := \{S \subset X\,;\, S \text{ は } x_0 \text{ を最小元とする整列部分集合}\}$$

$$S^+ := \{x \in X\,;\, x \text{ は } S \text{ の上界}\}$$

主張

$S^+ \setminus S = \varnothing$ なる $S \in \Lambda$ が存在する

⇒ $x_S \in S^+$ は極大元

ツォルンの補題の証明２

定理 (ツォルンの補題；定理 11.1)

X：帰納的順序集合；$x_0 \in X$

$\Rightarrow$ X の極大元 m で $x_0 \leqq m$ となるものが存在する

$$\Lambda := \{S \subset X \,;\, S \text{ は } x_0 \text{ を最小元とする整列部分集合}\}$$
$$S^+ := \{x \in X \,;\, x \text{ は } S \text{ の上界}\}$$

仮定

- すべての $S \in \Lambda$ に対して $S^+ \setminus S \neq \varnothing$
- X に極大元が存在しない.

______時______分 に再開します.