位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

ツォルンの補題

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2

東京工業大学理学院数学系

2024/06/18

ツォルンの補題の証明 2

定理 (ツォルンの補題；定理 11.1)

X：帰納的順序集合；$x_0 \in X$
$\Rightarrow$ X の極大元 m で $x_0 \leq m$ となるものが存在する

$\phi \neq \Lambda := \{S \subset X\,;\, S$ は x_0 を最小元とする整列部分集合$\} \ni \{x_0\}$
$S^+ := \{x \in X\,;\, x$ は S の上界$\} \neq \phi$ $(\because X$: 帰納的

仮定

- すべての $S \in \Lambda$ に対して $S^+ \setminus S \neq \varnothing$
- X に極大元が存在しない．

設定

- $f\colon \Lambda \ni S \mapsto f(S) \in X$, $f(S) \in S^+ \setminus S$ ($\Leftarrow$ 選択公理)
- $S' = S \cup \{f(S)\}$: 整列部分集合
- $\Lambda_0 := \{S \in \Lambda\,;\,$ 各 $x \in S \setminus \{x_0\}$ に対して $x = f(S_x)\}$.

$\Lambda \ni S \quad S^+ \setminus S \neq \phi \quad \Rightarrow \prod_{\Lambda \ni S} (S^+ \setminus S) \neq \phi$

$\boxed{\text{選択公理}}$

- $\exists f : \Lambda \ni S \longmapsto f(S) \in S^+ \setminus S \subset X$

$f(S)$: Sの要素でないSの上界

- $S' = S \cup \{f(S)\}$; $x \in S \Rightarrow x < f(S)$

- $f(S)$ は S の上界なので $x \leqq f(S)$
- $f(S) \notin S$ なので $x < f(S)$

- $\Lambda_0 = \{ S \in \Lambda \,;\, x = f(S_x)$ for $\forall x \in S \setminus \{x_0\} \}$

$S_x = \{ y \in S \,;\, y < x \}$

$S \ni \{x_0\}$

ツォルンの補題の証明3

- $\Lambda := \{S \subset X\,;\, S$ は x_0 を最小元とする整列部分集合$\} \neq \varnothing$
- $S^+ := \{x \in X\,;\, x$ は S の上界$\}$
- $f\colon \Lambda \ni S \mapsto f(S) \in X$, $f(S) \in S^+ \setminus S$
- $S' = S \cup \{f(S)\}$: 整列部分集合
- $\Lambda_0 := \{S \in \Lambda\,;\,$ 各 $x \in S \setminus \{x_0\}$ に対し $x = f(S_x)\} \ni \{x_0\}$.

主張 (cf. 補題 11.18)

- $S \subsetneq S'$
- $S \in \Lambda_0 \Rightarrow S' \in \Lambda_0$

Λ_0 の中で"増大列"がとれる.

$S \in \Lambda_0 \Rightarrow S_x \in \Lambda_0$

ツォルンの補題の証明 4

- $S' = S \cup \{f(S)\}$: 整列部分集合
- $\Lambda_0 := \{S \in \Lambda\,;\,$ 各 $x \in S \setminus \{x_0\}$ に対し $x = f(S_x)\} \ni \{x_0\}$.

主張 (cf. 補題 11.18)

- $S, T \in \Lambda_0$ なら，$S = T$, $S = T_y$, $S_x = T$ のいずれかが成り立つ.
  (⇐ 定理 11.12（順序同型までいえる）)
  (⇐ 補題 11.19（一致することが言える；超限帰納法)

ツォルンの補題の証明5

- $S' = S \cup \{f(S)\}$: 整列部分集合
- $\Lambda_0 := \{S \in \Lambda\,;\,$各$\,x \in S \setminus \{x_0\}$ に対し $x = f(S_x)\} \ni \{x_0\}$.
- $S, T \in \Lambda_0 \Rightarrow S = T,\ S = T_y,\ S_x = T$

$$W_0 := \bigcup_{S \in \Lambda_0} S$$

Λ_0の元の中で
"極大"のもの.

主張

- W_0 は X の整列部分集合（$\Leftarrow$ 命題 11.16）
- $S \in \Lambda_0 \Rightarrow S = (W_0)_x$（$\Leftarrow$ 命題 11.16）
- $\boxed{W_0 \in \Lambda_0}$（82 ページ）

ツォルンの補題の証明6

- $S' = S \cup \{f(S)\}$: 整列部分集合
- $\Lambda_0 := \{S \in \Lambda\,;\, 各\, x \in S \setminus \{x_0\}\, に対し\; x = f(S_x)\} \ni \{x_0\}$.

$\in \Lambda_0$

$$W_0 := \bigcup_{S \in \Lambda_0} S \in \Lambda_0 \qquad \Rightarrow \qquad (W_0)' \subset \boxed{\bigcup_{S \in \Lambda_0} S} = W_0.$$

矛盾.

極大元がない という仮定は使ってる?

本日の課題の提出締切は

2024 年 06 月 20 日（木曜日）07:00 JST