位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

ツォルンの補題

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2

東京工業大学理学院数学系

2024/06/18

ツォルンの補題の証明2

定理 (ツォルンの補題；定理 11.1)

X：帰納的順序集合；$x_0 \in X$

$\Rightarrow$ X の極大元 m で $x_0 \leq m$ となるものが存在する

$$\Lambda := \{S \subset X\,;\, S \text{ は } x_0 \text{ を最小元とする整列部分集合}\} \ni \{x_0\}$$
$$S^+ := \{x \in X\,;\, x \text{ は } S \text{ の上界}\}$$

仮定

- すべての $S \in \Lambda$ に対して $S^+ \setminus S \neq \varnothing$
- X に極大元が存在しない.

設定

- $f\colon \Lambda \ni S \mapsto f(S) \in X$, $f(S) \in S^+ \setminus S$ ($\Leftarrow$ 選択公理)
- $S' = S \cup \{f(S)\}$: 整列部分集合
- $\Lambda_0 := \{S \in \Lambda;\, \text{各 } x \in S \setminus \{x_0\} \text{ に対して } x = f(S_x)\}$.

ツォルンの補題の証明3

- $\Lambda := \{S \subset X\,;\, S$ は x_0 を最小元とする整列部分集合$\} \neq \varnothing$
- $S^+ := \{x \in X\,;\, x$ は S の上界$\}$
- $f\colon \Lambda \ni S \mapsto f(S) \in X$, $f(S) \in S^+ \setminus S$
- $S' = S \cup \{f(S)\}$: 整列部分集合
- $\Lambda_0 := \{S \in \Lambda\,;$ 各 $x \in S \setminus \{x_0\}$ に対し $x = f(S_x)\} \ni \{x_0\}$.

主張 (cf. 補題 11.18)

- $S \subsetneq S'$
- $S \in \Lambda_0 \Rightarrow S' \in \Lambda_0$

ツォルンの補題の証明 4

- $S' = S \cup \{f(S)\}$: 整列部分集合
- $\Lambda_0 := \{S \in \Lambda\,;\,$ 各 $x \in S \setminus \{x_0\}$ に対し $x = f(S_x)\} \ni \{x_0\}$.

主張 (cf. 補題 11.18)

- $S, T \in \Lambda_0$ なら，$S = T$, $S = T_y$, $S_x = T$ のいずれかが成り立つ.
  (⇐ 定理 11.12（順序同型までいえる）)
  (⇐ 補題 11.19（一致することが言える；超限帰納法)

ツォルンの補題の証明 5

- $S' = S \cup \{f(S)\}$: 整列部分集合
- $\Lambda_0 := \{S \in \Lambda\,;$ 各 $x \in S \setminus \{x_0\}$ に対し $x = f(S_x)\} \ni \{x_0\}$.
- S, $T \in \Lambda_0 \Rightarrow S = T$, $S = T_y$, $S_x = T$

$$W_0 := \bigcup_{S \in \Lambda_0} S$$

主張

- W_0 は X の整列部分集合（$\Leftarrow$ 命題 11.16）
- $S \in \Lambda_0 \Rightarrow S = (W_0)_x$（$\Leftarrow$ 命題 11.16）
- $W_0 \in \Lambda_0$（82 ページ）

ツォルンの補題の証明 6

- $S' = S \cup \{f(S)\}$: 整列部分集合
- $\Lambda_0 := \{S \in \Lambda\,;$ 各 $x \in S \setminus \{x_0\}$ に対し $x = f(S_x)\} \ni \{x_0\}$.

$$W_0 := \bigcup_{S \in \Lambda_0} S \in \Lambda_0 \qquad \Rightarrow \qquad (W_0)' \subset \bigcup_{S \in \Lambda_0} S = W_0.$$