2024 年 06 月 18 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

位相空間論第二（講義）(MTH.B202) 講義資料 2

お知らせ

- 14 名の方から課題提出がありました．T2SCHOLA にて返却しておりますのでご確認ください．なお，用紙に記入されているコメントは山田用のメモです．読めない字があるかもしれませんが，この資料に回答やコメントがありますのでそちらを参照してください．

授業に関する御意見

- いよいよどの科目も俗世から離れていっている感じがして，テンションが上がっています．（ついていこうと必死になって，その分生活水準は下がっている気がしますが）　**山田のコメント：**生活も大事ですね．

質問と回答

質問 1： 2Q で試験の出来が下がるというのは，生徒が怠惰になるからですか？ 内容が難しいからですか？

お答え： 学生（生徒）が怠惰と思いません．内容が難しい or 手加減した問題が作りにくいからでは？

質問 2： ツォルンの補題は「ツォルンの定理」としても差支えがないと思われますが，なぜ補題と言われているのでしょうか．　**お答え：**テキスト 73 ページに著者の見解がある．習慣と思ってよい．

質問 3： 整列集合という名前の由来は，A が整列集合のとき，$a_0 = \min A$ として，$B_i := \{a \in A | a > a_i\}$ とすると，$a_{i+1} = \min B_i$ $(i = 0, 1, \dots)$ というように，a_0 から小さい順に整列させていけるということなのかなと思ったのですが，山田先生の考えや，整列集合に関する何かしらの直観を教えていただきたいです．

お答え： そうだと思います．定理 11.6 はこのことを述べているといってもよいでしょう．

質問 4： 順序関係の定義の 2 つ目の条件 “$x \leqq y$ かつ $y \leqq x \implies x = y$” は，なぜ反対称律と呼ばれるのか．なぜ “反” という文字が付くのか．　**お答え：**よく知りませんが “対称性” は “$x \leqq y$ ならば $y \leqq x$”?

質問 5： 順序集合を考えるときに，例えば $\mathbb{R}$ とかで空集合はどう順序づけされるのですか．

お答え： 「$\mathbb{R}$ とかで」の意味がわかりませんが，空集合の順序づけは例 10.2.

質問 6： 順序準同型写像という命名はこの授業（及び教科書）以外で見つけることができませんでしたが，2 つの集合の間の「順序」という数学的構造を保つ写像であると解釈すれば，至って自然な命名だと思いました．位相空間の間の連続写像は，何らかの数学的構造を保つ準同型になっているのでしょうか？

お答え： はい．“位相構造”（とは何かは多分後期）を保ちます．

質問 7： 空でない集合 A, B について，単射 $A \to B$ と単射 $B \to A$ が存在すれば全単射 $A \to B$ が存在することはいえるが，単射な順序準同型 $A \to B$ と単射な順序準同型 $B \to A$ が存在するとき，A と B は順序同型といえるか．

お答え： 全順序を仮定しますか？

質問 8： 最小元をもつ全順序集合は整列集合といっていいでしょうか．

お答え： いいえ．$[0, \infty)$ は通常の順序について整列集合ではない．

質問 9： 自然な全順序は $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 以外に何がありますか？

お答え： “自然な” とは特に定義のある語ではないので，あなたが自然と思えば自然．

質問 10： 任意の空でない部分集合に最大元が存在するときの用語はありませんか？　**お答え：**山田は知らない（知っている人は教えて）双対な順序（例 10.7）を考えると大小が入れかわるので必要ないといえば必要ない．

質問 11： 順序集合を半順序集合と呼ぶこともあること（演習で知った）は，全順序集合の条件から，「順序関係があること」と「任意の元で比較可能であること」のうち後者を奪ったから「半」なのか，となんとなく納得したが，調べ

るとどうやら半順序集合の条件から反対称律を奪った「前順序集合」というものもあるようである．前順序集合であるが半順序集合でないようなものに特別な性質はあるのか？ また，半順序集合の条件から他の反射律や推移律を奪った，名もなき集合ではどうか？（そもそもこの 2 つは存在するのか？）

お答え： 調べてみるといろいろ例がありますね（山田は使ったことがない）最後のやつはただの集合では？

質問 12： 整列集合が最大元ではなく最小元によって定義されているのは，特別な理由があるのでしょうか．自然数 $\mathbb{N}$ が整列集合になるように最小元を採用したと個人的には考えています．

お答え： お手本が $\mathbb{N}$ だからでしょうね．

質問 13： 極大元について：$(X, \leqq)$: 順序集合とし，“$a \in X$ が X の極大元 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a < x$ となる $x \in X$ は存在しない” でした. 定義を書き下すと “$\neg(\exists x \in X \text{ s.t. } a < x)$” “$\forall x \in X, a \geqq x$” となります. しかし a と x に順序関係がないものがあるときがあります. “$\forall x \in X, (a \geqq x$ or a と x は比較可能でない$)$” “$\neg(\exists x \in X$ s.t. $a < x$ かつ a と x は比較可能$)$” の省略ということですか.

お答え： “$a < x$” の否定は “$(x$ が a と比較可能でない$)$ または $(x \leqq a)$” ですね.

質問 14： 集合の不等号の図式で（山田注：図は省略）というような書き方を教えてもらったが，今日出た全ての例で一本の枝分かれにしかなっていなかったので，実際に 2 本の枝分かれとして定義できるのかが気になった.（何か問題は生じないのか） **お答え：**なかったですか？