位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

ツォルンの補題の応用

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2

東京工業大学理学院数学系

2024/06/25

ツォルンの補題

定義

順序集合

$(X, \leqq)$ が帰納的 $\Leftrightarrow$ 任意の空でない全順序部分集合が上に有界

定理 (ツォルンの補題；定理 11.1)

X：帰納的順序集合；$x_0 \in X$

$\Rightarrow$ X の極大元 m で $x_0 \leq m$ となるものが存在する

Q and A

Q: Zorn の補題の証明で，「X に極大元が存在しない」という仮定を使っていないならば初めからその仮定を置く必要はないのではありませんか？（その場合，Zorn の補題の証明としては何だか気持ち悪いものになってしまいそうですが.）

背理法の仮定：前半のケースを除外するために

Q: ツォルンの補題の証明において極大元が存在しない仮定は，$S^+ \setminus S$ が空集合ではないところに効いているのか.（$S^+ \setminus S$ が空集合と仮定すると，S が最大元をもち，それは X の極大元である.）

Q: ツォルンの補題の証明を一通り読んで理解したが，その証明の中で特に重要な論法はどのあたり．また，この証明の過程でいくつかの補題が出てきたが，その中で特に有用なものはどれか.

Q and A

命題

Q: ツォルンの補題と選択公理は同値であるが，どうして「補題」と「公理」が$\boxed{\text{同値}}$になりえるんですか？

集合論の公理系 (ZF) + 選択公理

集合論の公理系 (ZF) + Zorn

Euclid 幾何の公理系 (公準 postulates)

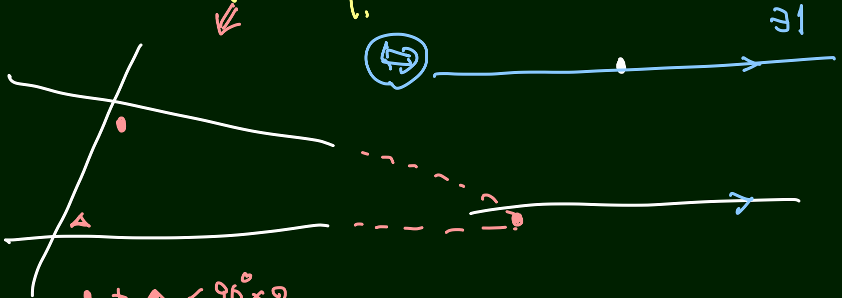
1.

2.

3.

4.

⑤ 平行線公準



$\bullet + \blacktriangle < 90^\circ \times 2$

ツォルンの補題の言い換え

$A \in \mathcal{P}$: Aが $\mathcal{P}$ をみたす
$A \notin \mathcal{P}$: Aが $\mathcal{P}$ をみたさない

X: 集合

定義 (定義 12.1)

$\mathcal{P} \subset 2^X$ がX の部分集合に関する有限的な性質
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ["$S \in \mathcal{P}$" と "S の任意の有限部分集合 $\in \mathcal{P}$" が同値]

ツォルンの補題の言い換え

定理 (定理 12.2)

次の 2 つはそれぞれツォルンの補題と同値である：

(a). $\mathcal{P} \subset 2^X$ が有限的な性質，かつ $\mathcal{P} \neq \varnothing$
$\Rightarrow$ 包含関係について極大な $M \in \mathcal{P}$ が存在

(b). $(X, \leqq)$: 順序~~関係~~ 集合
$\Rightarrow$ 包含関係に関する X の極大な全順序部分集合 M が存在

・Zorn ⇒ (a) : $Q \subset P$ $(Q, \subset)$について全順序

・$M := \bigcup_{A \in Q} A \ (\subset X)$ $\hat{2}^X$ 有限性

・MはQの上界 ・$M \in P$

⇒ Pは帰納的 $\underset{\text{Zorn}}{\Longrightarrow}$ 極大元がとれる。

任意の2元が比較可能

・(a) → (b) $P \subset 2^X$

$(X, \leqq)$の全順序部分集合全体の集合

・有限的性質 ← $\{a, b\}$が全順序集合。 全順序

極大限の存在がいえる。 極大部分集合

・(b) ⇒ Zorn Mの上界m

$(X, \leqq)$: 帰納的 $\boxed{X_0 = \{x ; x \geqq x_0\}}$ が極大元

応用例：チコノフの定理

定理 (定理 22.18) (4Q ?)

コンパクト位相空間の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積はコンパクト

11 時 50 分 に再開します.