位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

ツォルンの補題の応用

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2

東京工業大学理学院数学系

2024/06/25

線形空間の基底

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$

V：体 K 上の線形空間.

スカラの集合

$|H| < \infty$ でないときも考えている

定義

(basis)

$H \subset V$ が V の$\boxed{\text{基底}}$であるとは次を満たすこと：

1. ▶ H の任意の有限個の元は K 上線形独立　　$|H|$ を小さくする
2. ▶ V の任意の元は H の有限個の元の K 上線形結合で書ける　　$|H|$ を大きくする

① $e_1, \cdots, e_n \in H$　$r_1 \cdots r_n \in K$

$r_1 e_1 + \cdots + r_n e_n = 0 \Rightarrow r_1 = \cdots = r_n = 0$

② $x \in V \Rightarrow e_1 \cdots e_n \in H,\ r_1 \cdots r_n \in K$ で

$x = r_1 e_1 + \cdots + r_n e_n$

となるものが存在.

線形空間の基底

定理　Hamel 基

任意の線形空間 V は基底をもつ.

1年生の線形代数: "有限次元" の場合に留めている

興味があるのは H が無限集合の場合.

"無限次元"

$\because$ $A \subset V$ に対して性質

⊛ A の任意の有限部分集合は線形独立

$\Phi = \{ A \in 2^V ; ⊛ \}$ 有限的な性質

$\Rightarrow$ 極大元 $H \in \Phi$ が存在する　これが求めるもの.

$\square$

線形空間の基底

ℝ は ℚ 上の線形空間　　H: Hamel基

$\cup$
$x, y \rightsquigarrow \lambda x + \mu y \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{Q})$

系 (定理 12.3)

$\mathbb{R}$ の部分集合 H で次を満たすものが存在する：

- 任意の $b_1, \ldots, b_n \in H$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立.
- $x \in \mathbb{R}$ に対して $b_1, \ldots, b_n \in H$ と $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$ が存在して

$$x = r_1 b_1 + \cdots + r_n b_n$$

　を満たす.
- $\boxed{1 \in H.}$

Rem　$1, \sqrt{2}$ は ℚ 上線形独立,
ℝ 上線形従属

- <u>線形写像</u>: $f: V \to W$ (V, W: K上の線形空間)

fが線形: $\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{cases}$ $\left(\begin{array}{l} x, y \in V \\ \lambda \in K \end{array} \right)$

- <u>example</u> $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $K = \mathbb{R}$

fが線形 $\Rightarrow$ $f(x) = Ax$. A: $n \times m$ (行列)

<u>$m=1, n=1$</u>

$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & a \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) & b \end{cases}$ 線形性

ⓑ $\Rightarrow$ $f(x) = f(x \cdot 1) = x \underset{A}{\underbrace{f(1)}} = Ax$.

ⓐを用いずに示せる

Q $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x+y)=f(x)+f(y)$ をみたすもの?

Fact fが微分可能ならとりうるfは $f(x)=ax$.

・$f(0)=0$, 微分をしてみる

Fact fが連続 ‥‥ $f(x)=ax$

$\because$ $f(2x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

‥ $f(mx)=mf(x)$ $(m\in\mathbb{Z})$

$f(\frac{1}{m}x)=\frac{1}{m}f(x)$

$\therefore$ $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ $\lambda\in\mathbb{Q}$

連続性

$\therefore$ $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ $\lambda\in\mathbb{R}$

$\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$

かつ f が 1次関数でない.

∵ H: Hamel基底

$\downarrow$

1、

$f : x \mapsto x = \sum_{j \geq 1}^{n} r_j b_j$ $b_j \in H$、$r_j \in \mathbb{Q}$

として $b_1 = 1$ としておく

$\mapsto r_1 \in \mathbb{Q}$

線型写像 over $\mathbb{Q}$、

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ $(\lambda \in \mathbb{Q})$

本日の課題の提出締切は

2024 年 06 月 20 日（木曜日）07:00 JST