2024 年 06 月 25 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

位相空間論第二（講義）(MTH.B202) 講義資料 3

■お知らせ

- 10 名の方から課題提出がありました．T2SCHOLA にて返却しておりますのでご確認ください．なお，用紙に記入されているコメントは山田用のメモです．読めない字があるかもしれませんが，この資料に回答やコメントがありますのでそちらを参照してください．
- 学勢調査 2024 が始まっています．回答お願いします．
- T2SCHOLA に学修アンケートを設置しました．学期終了までにご回答いただければ幸いです．

■授業に関する御意見

- Zorn の補題の証明ですが，長くてイメージできませんでした．Zorn の補題自体は，講義でやったグラフでの全順序のイメージを元に上のように（山田注：図は省略）イメージでき，楽しかったので，Zorn の証明にも直観的なセツメイがあるといいと思いました． **山田のコメント：** どの程度だと直観的なんでしょう．
- 大雨の中お疲れ様でした．とてもおもしろかったです． **山田のコメント：** Thanks.

■質問と回答

質問 1： Zorn の補題の証明ですが，その証明で用いられる整列集合関連の命題の大半が講義で省かれたということは，Zorn の補題の証明や省かれた命題が今後あまり役に立たないということですか？（講義では明言は立たれていなかったので伺いたいです） **お答え：** いいえ．あらすじやイメージを伝えることを主眼にしたので．

質問 2： 今回の講義の証明では「選択公理」 $\Longrightarrow$ 「ツォルンの補題」を示しましたが，逆に「ツォルンの補題」 $\Longrightarrow$ 「選択公理」を示すことは可能でしょうか． **お答え：** はい，同値です．

質問 3： 超限帰納法は最小限（原文ママ：「最小元」か）を持つ全順序集合（$[0,1]$ とか $[0,\infty)$）では成立しないのか．

質問 4： 超限帰納法は最小元 x_0 をもつ全順序集合 $(X,\leqq)$ では成り立たないですか．$X\setminus\{x_0\}$ が最小元をもたなくても，利用できるのかなと思いました．

お答え： 証明には整列集合の性質が使われていますね．

質問 5： Zorn の補題の証明で，「X に極大元が存在しない」という仮定を使っていないならば初めからその仮定を置く必要はないのではありませんか？（その場合，Zorn の補題の証明としては何だか気持ち悪いものになってしまいそうですが．） **お答え：** 背理法の仮定です．定理の仮定ではないですね．

質問 6： ツォルンの補題の証明を一通り読んで理解したが，その証明の中で特に重要な論法はどのあたり．また，この証明の過程でいくつかの補題が出てきたが，その中で特に有用なものはどれか．

お答え： どれだと思います？ 整列集合の比較定理とか？

質問 7： ツォルンの補題と選択公理は同値であるが，どうして「補題」と「公理」が同値になりえるんですか？

お答え： 集合論の公理系「ZF＋選択公理」から Zorn の補題が証明できる．一方，公理系「ZF＋Zorn の補題」から選択公理（これ自身もひとつの命題）が証明できる．

質問 8： ツォルンの補題の証明において極大元が存在しない仮定は，$S^+\setminus S$ が空集合ではないところに効いているのか．（$S^+\setminus S$ が空集合と仮定すると，S が最大元をもち，それは X の極大元である．）

お答え： そう，それが最初のステップだった．

質問 9： ツォルンの補題の証明で，$x\in X$ で極大元が存在しないならば，$\forall S\subset X$ に対し，$S^+\setminus S\neq\emptyset$ という仮定から，$f(S)\in S^+\setminus S$ を設定し，S をはみ出したものをつくることで矛盾を導いていたが，はみだすだけなら，S が 1 つでも $f(S)\in S^+\setminus S$ となるようにすればいいと感じたので，任意であることはどこで使っているのかが気になった． **お答え：** Λ_0 を定義するときに関数 $f(S)$ が必要．

質問 10： $\mathbb{R}$ に整列順序 $\leqq$ を入れた $(\mathbb{R},\leqq)$ は，可算濃度になるのでしょうか．また，稠密性と連続性の性質も失われますか． **お答え：** 前半：いいえ．濃度の可算性は集合の性質で，順序によらない．後半：稠密性，連続性は順序から決まる性質ではない．