位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

整列定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2

東京工業大学理学院数学系

2024/07/02

命題 (命題 11.16)

X：集合；$\{S(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$：$X$ の部分集合の族.

- $S(\lambda)$ には整列順序 $\leqq_\lambda$ が存在する.
- $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して $(S(\lambda), \leqq_\lambda)$, $(S(\mu), \leqq_\mu)$ は一方が他方の切片に順序集合として一致する.
- $S := \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S(\lambda)$

$\Rightarrow$

S の整列順序 $\preceq$ で次を満たすものが唯一つ存在する：

- $S(\lambda) \neq S \Rightarrow S(\lambda)$ は S の切片.

ツォルンの補題の言い換え

定理 (ツォルンの補題；定理 11.1)

X：帰納的順序集合；$x_0 \in X$

$\Rightarrow$ X の極大元 m で $x_0 \leqq m$ となるものが存在する

定理 (定理 12.2)

次の 2 つはそれぞれツォルンの補題と同値である：

(a). $\mathcal{P} \subset 2^X$ が有限的な性質，かつ $\mathcal{P} \neq \varnothing$

$\Rightarrow$ 包含関係について極大な $M \in \mathcal{P}$ が存在

(b). $(X, \leqq)$：順序集合

$\Rightarrow$ 包含関係に関する X の極大な全順序部分集合 M が存在

整列定理

定理 (定理 12.6)

任意の集合 X 上に整列順序が存在する.

- $\mathcal{W} = \{(S, \leqq); S \subset X, \ \leqq$ は S の整列順序$\}$
- $(S_1, \leqq_1) \preceq (S_2, \leqq_2) \Leftrightarrow S_1 = S_2$ または $S_1 = (S_2)_a$
- $\mathcal{V} : \mathcal{W}$ の包含関係に関する極大全部分集合.

$$V := \bigcup_{S \in \mathcal{V}} S$$

整列定理と選択公理

系 (系 12.7)

選択公理，ツォルンの補題，整列定理は同値.

______時______分 に再開します.