2024 年 07 月 02 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

位相空間論第二（講義）(MTH.B202) 講義資料 4

■お知らせ

- 9 名の方から課題提出がありました．T2SCHOLA にて返却しておりますのでご確認ください．用紙に記入されているコメントは山田用のメモです．読めないかもしれませんが，この資料に回答やコメントがありますのでそちらを参照してください．

■授業に関する御意見

- オンライン、いい感じでした。　**山田のコメント：** Thanks.
- Zoom のバックグラウンド、興味深いです。　**山田のコメント：** 一応仮想背景です．さけびちゃん．
- 教室に虫がいつもいるので，次のクオーターからは違う教室にしてほしいです．
  山田のコメント： どんな虫がいます？ とりあえず駆除の依頼をします．

■質問と回答

質問 1： 無限次元ベクトル空間での基底は線形代数学ではハメル基底で、無限の要素を持つ座標ベクトルで表されるフーリエ級数（変換？）などとは別物とのことでした。後者のほうが無限個の基底に無限個の線型結合の係数という感じで、有限次元ベクトル空間における基底の自然な拡張な気がします。それでもハメル基底を考えるのはなぜですか？ 線形性の $f(x+y)=f(x)+f(y)$ からは無限個の和については成り立たないからとかですか？

お答え： 収束の問題があるので位相構造が必要.

質問 2： 線形空間の基底の定義として、有限個の元という表現を使っていましたが、本来の定義では基底ではないが有限個という制限をなくせば定義を満たすようになるものは存在するのでしょうか。

お答え： 無限個の和をどう定義しますか？

質問 3： 選択公理を認めることでハメル基底の存在がいえるということは、ハメル基底を実際に構成する方法は存在しない、ということでしょうか。 **お答え：**一般にはそう．

質問 4： 講義でハメルの基底において $1\in H$ という条件を加えたものを扱った。教科書の p.84〜85 の証明を読んで生じた疑問がある。$\mathcal{P}$ の条件として $1\in B$ を加えていることで、$\mathcal{P}$ が有限的な性質であることが示せなくなる気がするが大丈夫か。 **お答え：**確かに，$X\in\mathcal{P}$ の有限部分集合は 1 を要素にもたないかもしれませんね．ここでは “有限的性質” を “∗”（後述）にとりかえて定理 12.2 と同様の議論をすれば回避できそうです．
（∗）　$X\in\mathcal{P} \iff$ (任意の X の有限部分集合で 1 を要素にもつもの) $\in\mathcal{P}$.

質問 5： “有限的な性質” がまだイメージできていないので，具体例があるとうれしいです．ほとんどの場合，成り立ちますか．($X=\{0,1,2\}, S=\{0\},\{0,1\}$)　**お答え：**まずイメージはよいので定義がちゃんといえますか？ $X=\{0,1,2\}, S=\{0\},\{0,1\}$ というのは何を表していますか？

質問 6： ツォルンの補題の応用の例としてたくさんあると感じました。ツォルンの補題がさまざまな数学分野で広く応用されている理由として何が考えられますか？

お答え： “上に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合は上限をもつ” のような自然と思える性質だからではないでしょうか.

質問 7： ツォルンの補題と同値な (a), (b) を講義では示しました．今後これらを用いて問題演習をしていくことになると思いますが，(b) はツォルンや (a) に比べて使いにくいと思いました．(ツォルンや (a) は X が帰納的であると $\mathcal{P}$ が X の部分集合に関する有限的な性質であるとか足がかりがある)．(b) を使うような証明があるのでしょうか.

お答え： むしろ明示的な仮定がない分使いやすいのでは？

質問 8： 連続性を仮定しなければ，ハメル基底を用いて $f(x+y)=f(x)+f(y)$ の解は $f(x)=ax$ 以外に存在することを示せるという話だったが，線形でない関数方程式も連続性を仮定しなければハメル基底を用いてほかに解が存在することを示せるのか.　**お答え：**具体的にはどんな問題を考えていますか？

質問 9： 今回の講義で「Zorn の補題」$\Longrightarrow$「Hamel 基底の存在」を示したが，逆が成り立つかどうかが気になった．また，逆が成り立たないならば，「Hamel 基底の存在」の証明の際，「Zorn の補題」を用いずに示すことは可能なのかが気になった.　**お答え：**「気になった」のはいいとして質問は？ Hamel $\Longrightarrow$ Zorn をやるとしたら一般の順序集合を考える際にどんな線形空間をつくるかですね.