位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

ユークリッド空間

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2

東京工業大学理学院数学系

2024/07/09

Q and A

Q: 授業でさまざまな距離を扱いました．解析の授業ではさまざまなノルムを扱いました．ユークリッド空間の距離はノルムで定めています．これ以外の距離とノルムについて何か関係はあるのでしょうか．それとも全く別物なのでしょうか．

Q: 距離と似ているものにノルムがあると思うが，距離は一般の空間で定義できて，ノルムはベクトル空間における距離ということなのか．

ノルム

Norm

定義

V：$\mathbb{R}$ 上の線形空間

$\|\cdot\|: V \ni \boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\| \in \mathbb{R}$ が V の ノルム

$\Leftrightarrow$ 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

- $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\|\boldsymbol{x}\| > 0$.
- $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$.
- $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

$\|\boldsymbol{0}\| = 0$

距離

定義

X：集合

$d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ が X 上の 距離であるとは，任意の $P, Q, R \in X$ に対して次が成り立つこと．

- $d(P, Q) \geqq 0$,
- $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$,
- $d(P, Q) = d(Q, P)$,
- $d(P, R) \leqq d(P, Q) + d(Q, R)$.

定理

V：$\mathbb{R}$ 上の線形空間；$\|\cdot\|$：ノルム

$\Rightarrow d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|$ は V 上の距離

$\Leftarrow$ (V 上の距離 d に対して $d(x,y)=\|y-x\|$

となるノルムは存在するか？)　No

反例　$d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$　離散距離

これに対応するノルムはない　ノルムの性質

$\because$)　$d(2x,0)=\|2x\|=2\|x\|$

$=2d(x,0)$

V 上の距離 d が ノルムから来るなら

$$d(x+a, y+a) = d(x, y)$$

をみたす(平行移動に関する不変性).

ノルムの例

Euclid

$\mathbb{R}^n$：n 次元数ベクトル空間（列ベクトル）

- $\|\boldsymbol{x}\|_E := \sqrt{{}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}$：ユークリッドノルム

$A = (a_{ij})$

$\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum a_{ij}^2$

$\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$：実数を成分とする n 次正方行列全体のなす線形空間.

- $\|A\|_2 := \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$
- $\|A\|_\infty := \sup\left\{ \dfrac{\|A\boldsymbol{x}\|_E}{\|\boldsymbol{x}\|_E} \,;\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}$

・${}^tAA$：半正定値対称行列 (固有値 $\geqq 0$)

$\lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_n \geqq 0$

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$

$\|A\|_\infty = \sqrt{\lambda_1}$

· $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$

· $\|A\|_\infty = \sqrt{\lambda_1}$

○ $\|A\|_\infty \leqq \|A\|_2 \leqq \sqrt{n}\,\|A\|_\infty$

$\|\ \|_2$ に関する収束と

$\|\ \|_\infty$ 〃 は一致する

これらは同値なノルム

$$m\tilde{d}(x,y) \leqq d(x,y) \leqq k\tilde{d}(x,y)$$

をみたす定数 $k, m > 0$ が存在するとき $d, \tilde{d}$ は同値である.

内積

定義

V：$\mathbb{R}$ 上の線形空間
双線型かつ対称な写像 $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \ni (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \in \mathbb{R}$ が
V の<u>内積</u> $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x} \neq 0$ ならば $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$

$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

$y \mapsto \langle x, y\rangle$ 線形

$x \mapsto \langle x, y\rangle$ 〃

$\langle x, 0\rangle = 0$

$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ これはノルム

三角不等式 $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

角度が well-def'd

Cauchy-Schwartz $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$

内積 → ノルム → 距離

$\langle\ ,\ \rangle$: 実線形空間 V の内積 $\Rightarrow$ $\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}$ は V のノルム

$\not\Leftarrow$

$\Rightarrow d(x, y) = \|y - x\|$ は距離

$\not\Leftarrow$

<u>Lemma</u> $\|\ \|$: 内積からくるノルム

$\Rightarrow$ ☆ $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

中線定理

<u>Thm</u> ノルム $\|\ \|$ が ☆ をみたす $\Rightarrow$ $\exists$ 内積

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

ユークリッド内積

定義

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_E := {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$$

↓

Euclid より

距離空間

- 距離空間 (X, d)：集合 X と X 上の距離 d の組.
- ユークリッド空間：$\mathbb{R}^n$ にユークリッド内積から定まる距離（ユークリッド距離）d_E を入れたもの.

Q and A

Q: キョリの構造を変えることで，収束の概念が変わると教わったが，例えば，収束の概念は同じでキョリの構造は違うものはつくることができますか？

休憩　11:30〜