

位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

ユークリッド空間

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

<http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2>

東京工業大学理学院数学系

2024/07/09

Q and A

- Q: 授業でさまざまな距離を扱いました。解析の授業ではさまざまなノルムを扱いました。ユークリッド空間の距離はノルムで定めています。これ以外の距離とノルムについて何か関係はあるのでしょうか。それとも全く別物なのでしょうか。
- Q: 距離と似ているものにノルムがあると思うが、距離は一般の空間で定義できて、ノルムはベクトル空間における距離ということなのか。

ノルム

定義

V : \mathbb{R} 上の線形空間

$\|\cdot\|: V \ni \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\| \in \mathbb{R}$ が V の ノルム

\Leftrightarrow 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

- ▶ $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ならば $\|\mathbf{x}\| > 0$.
- ▶ $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$.
- ▶ $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

距離

定義

X : 集合

$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ が X 上の 距離 であるとは, 任意の $P, Q, R \in X$ に対して次が成り立つこと.

- ▶ $d(P, Q) \geq 0$,
- ▶ $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$,
- ▶ $d(P, Q) = d(Q, P)$,
- ▶ $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$.

ノルム \rightarrow 距離

定理

$V : \mathbb{R}$ 上の線形空間 ; $\|\cdot\|$: ノルム

$\Rightarrow d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ は V 上の距離

ノルムの例

\mathbb{R}^n : n 次元数ベクトル空間 (列ベクトル)

▶ $\|\mathbf{x}\|_E := \sqrt{{}^t\mathbf{x}\mathbf{x}}$: ユークリッドノルム

$M(n, \mathbb{R})$: 実数を成分とする n 次正方行列全体のなす線形空間.

▶ $\|A\|_2 := \sqrt{\text{tr}({}^tAA)}$

▶ $\|A\|_\infty := \sup \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|_E}{\|\mathbf{x}\|_E} ; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}$

内積

定義

V : \mathbb{R} 上の線形空間

双線型かつ対称な写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}$ が

V の内積 $\Leftrightarrow \mathbf{x} \neq 0$ ならば $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$

内積 \rightarrow ノルム \rightarrow 距離

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: 実線形空間 V の内積 $\Rightarrow \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ は V のノルム

ユークリッド内積

定義

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_E := {}^t \boldsymbol{x} \boldsymbol{y}$$

距離空間

- ▶ 距離空間 (X, d) : 集合 X と X 上の距離 d の組.
- ▶ ユークリッド空間 : \mathbb{R}^n にユークリッド内積から定まる距離 (ユークリッド距離) d_E を入れたもの.

Q and A

Q: キョリの構造を変えることで，収束の概念が変わると教わったが，例えば，収束の概念は同じでキョリの構造は違うものはつくることができますか？