位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

ユークリッド空間

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2

東京工業大学理学院数学系

2024/07/09

$(\mathbb{R}^n, d)$：ユークリッド空間[1]

open ball

- $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \,;\, d(x,y) < r\}$：中心 x, 半径 r の開球体.

ℝⁿ内の n-1次元球面

$\{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| = r\}$ $\{y \in \mathbb{R}^n ; d(x,y) = r\}$ 球面 sphere

球(体) ball.

$\{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| < r\}$ ← n次元ball

[1] 以下の議論のほとんどは一般の距離空間 (X, d) で成立する

内点・外点・境界点

$S \subset \mathbb{R}^n$

定義 (定義 13.4)

$x \in \mathbb{R}^n$ が

- S の<u>内点</u> $\Leftrightarrow$ $B(x, \varepsilon) \subset S$ を満たす数 $\varepsilon > 0$ が存在.
- S の<u>外点</u> $\Leftrightarrow$ x は S^c の内点.
- S の<u>境界点</u> $\Leftrightarrow$ x は S の内点でも外点でもない

開核

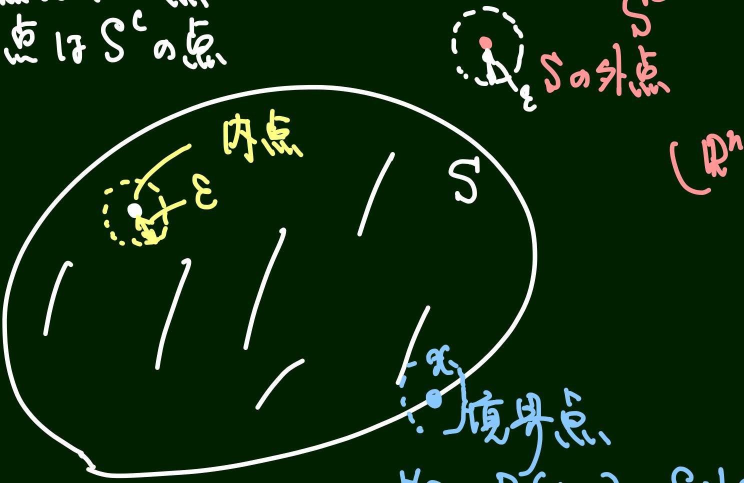
$S^\circ := \{x\,;\, x$ は S の内点$\}$ 　S の内部 interior

$S^e := \{x\,;\, x$ は S の外点$\}$ 　S の外部 exterior

$\partial S := \{x\,;\,, x$ は S の境界点$\}$ 　S の境界 boundary

$$\mathbb{R}^n = S^\circ \cup S^e \cup \partial S$$ (非交和)

Sの内点はSの点
Sの外点はS^cの点



$\forall \varepsilon,\ B(x,\varepsilon) \cap S \neq \phi$
$B(x,\varepsilon) \cap S^c \neq \phi$

$\mathbb{R}^n$の点は Sの内点
外点
境界点

内部の性質

$2^{\mathbb{R}^n} \ni S \longmapsto S^\circ \in 2^{\mathbb{R}^n}$

開核作用素

$S \subset \mathbb{R}^n$

Fact (系 13.7)

$(S^\circ)^\circ = S^\circ \subset S$

- $(S^\circ)^\circ \subset S^\circ$ (ok)
- $S^\circ \subset (S^\circ)^\circ$ を示す

⋮

閉包

（補集合に $\overline{}$ を使わないのはこの記号による）

$S \subset \mathbb{R}^n$

定義 (定義 13.8)

x が S の触点 $\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $S \cap B(x, \varepsilon) \neq \varnothing$

- $x \in S^\circ$ は S の触点 ✓
- $x \in \partial S$ は S の触点 ✓
- $x \in S^e$ は S の触点ではない. ✓

$$\overline{S} := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, x \text{ は } S \text{ の触点}\} \qquad (S \text{ の閉包})$$

closure

$$\overline{S} = S \cup \partial S$$

example

$$\overline{B(x,r)} = \{y \in \mathbb{R}^n \,;\, d(x,y) \leq r\}$$

閉包の特徴付け

命題 (命題 13.12)

$\overline{S} = S^\circ \cup \partial S$

内部 S°
外部 S^{e}
境界 ∂S
閉包 $\overline{S}$

Sが開集合
$\Longleftrightarrow S = S^{\circ}$

Sが閉集合
$\Longleftrightarrow S = \overline{S}$

$\Downarrow$

連続性の概念

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2+y^2 < 1\}$: 開

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2+y^2 \leq 1\}$: 閉

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ が連続

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}$ の任意の開集合 I に対して

閉

$f^{-1}(I)$ が開

閉

$\mathbb{R}$ の開区間 : 開

$f^{-1}\left((-\infty, 1)\right)$

$f^{-1}\left((-\infty, 1]\right)$

$f(x,y) = x^2+y^2$

Example ・$M(n, \mathbb{R})$ に Euclid norm で きょりを与える。($\mathbb{R}^{n^2}$)

・多項式は連続写像

・$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \,;\, \det A \neq 0\}$

(正則行列全体)

は $M(n, \mathbb{R})$ の中で開。

$= \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

正則行列は

ちょっと動かしても正則

本日の課題の提出締切は

2024 年 07 月 11 日（木曜日）07:00 JST