

位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

ユークリッド空間

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

<http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2>

東京工業大学理学院数学系

2024/07/09

ユークリッド空間

(\mathbb{R}^n, d) : ユークリッド空間¹

▶ $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n; d(x, y) < r\}$: 中心 x , 半径 r の開球体.

¹以下の議論のほとんどは一般の距離空間 (X, d) で成立する

内点・外点・境界点

$$S \subset \mathbb{R}^n$$

定義 (定義 13.4)

$x \in \mathbb{R}^n$ が

- ▶ S の内点 $\Leftrightarrow B(x, \varepsilon) \subset S$ を満たす数 $\varepsilon > 0$ が存在.
- ▶ S の外点 $\Leftrightarrow x$ は S^c の内点.
- ▶ S の境界点 $\Leftrightarrow x$ は S の内点でも外点でもない

$$S^\circ := \{x; x \text{ は } S \text{ の内点}\} \quad S \text{ の内部}$$

$$S^e := \{x; x \text{ は } S \text{ の外点}\} \quad S \text{ の外部}$$

$$\partial S := \{x; x \text{ は } S \text{ の境界点}\} \quad S \text{ の境界}$$

内部の性質

$$S \subset \mathbb{R}^n$$

Fact (系 13.7)

$$(S^\circ)^\circ = S^\circ \subset S$$

閉包

$$S \subset \mathbb{R}^n$$

定義 (定義 13.8)

x が S の触点 \Leftrightarrow 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $S \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$

- ▶ $x \in S^\circ$ は S の触点
- ▶ $x \in \partial S$ は S の触点
- ▶ $x \in S^e$ は S の触点ではない.

$$\bar{S} := \{x \in \mathbb{R}^n; x \text{ は } S \text{ の触点}\} \quad (S \text{ の閉包})$$

閉包の特徴付け

命題 (命題 13.12)

$$\bar{S} = S^\circ \cup \partial S$$