

2024年07月09日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

位相空間論第二（講義）（MTH.B202）講義資料 5

■お知らせ

- 8名の方から課題提出がありました。T2SCHOLAにて返却しておりますのでご確認ください。用紙に記入されているコメントは山田用のメモです。読めないかもしれませんが、この資料に回答やコメントがありますのでそちらを参照してください。
- 次回、7月16日に定期試験の予告を行います。皆様お誘い合わせの上ご出席ください。
- T2SCHOLAの学修アンケートにご協力願います。現在0/41件（2024年7月8日08:40時点）の回答をいただいています。

■授業に関する御意見

- アリが机の上によくいます。 山田のコメント：了解。教務担当が確認できるよう、見つけたら写真をとっておいてください。

■質問と回答

質問1： $AC \implies Zorn \implies$ 整列可能 $\implies AC$ と円環をなすことはわかりました。1つ思うのが、 $AC < \text{整列可能} < Zorn$ という感じで、同値なのに AC が弱いように思います。上の円環の証明で、“ $AC \implies Zorn$ ” は set の定義に用いただけ、“整列可能 $\implies AC$ ” は min の存在から瞬サツという感じとなっていますし、Zorn のホダイの応用ハニイはとても広いからです。このような不均衡の何かしらのセツメイはできるのでしょうか？

お答え：“弱い”という感じのセツメイでしょうか？

質問2： 整列可能の \leq が具体的に構成できればなあと思いました。

お答え： そういうものではなさそうですね。一意性もないし。

質問3： 講義で距離の定義を扱った際に、 $d(x, y) = 0 \implies x = y$ という条件があったが、この条件から、 $\forall x \in X$ で $d(x, x) = 0$ であることは導出できるか。

お答え： おっしゃるとおりで \implies は \iff にしないとだめですね。 $d: X \times X \ni (x, y) \mapsto 1 \in \mathbb{R}$ が反例になりますね。

質問4： 集合 X 上で距離の定義をみたら $d(x, y)$ が定義できるとすると、この $d(x, y)$ の決め方はかならず有限通りですか？ お答え：いいえ。今回例をあげます。

質問5： 距離を直積集合から実数への写像として定義していましたが、実数という特定の集合への写像に限定しているのはなぜですか？

お答え： とりあえずよく知っている距離が実数だから。

質問6： 授業でさまざまな距離を扱いました。解析の授業ではさまざまなノルムを扱いました。ユークリッド空間の距離はノルムで定めています。これ以外の距離とノルムについて何か関係はあるのでしょうか。それとも全く別物なのでしょうか。

お答え： ノルムは距離を定めますが、逆は言えません。

質問7： 距離と似ているものにノルムがあると思うが、距離は一般の空間で定義できて、ノルムはベクトル空間における距離ということなのか。

お答え： ノルムは線型空間上のある種の一様性をもった距離。

質問8： 無限個の和は極限で定義され、位相を入れることで極限を考えることができるという話が講義中にありました。形式的べき級数は無限個の和を考えていますが、この場合、極限を考えているというよりは、無限個の直積を考えていると捉えるのが正しいのでしょうか。

お答え： 大体そんな感じです。“ \mathbb{R}^∞ ”ですね。

質問9： キョリの構造を変えることで、収束の概念が変わると教わったが、例えば、収束の概念は同じでキョリの構造は違うものはつくることができますか？

お答え： はい。“同値な距離”を講義で扱います。