位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

開集合・閉集合

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2

東京工業大学理学院数学系

2024/07/16

$\mathbb{R}^n$ のいろいろな距離

例 (例 15:4)

$\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \ldots, x_n)$;

- $|x|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j|$,
- $|x|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} \quad (p \geqq 1)$
- $|x|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$

p = 2 : Euclid norm

(Rem 0 < p < 1 のときは ノルムにならない.)

これらから決まる $\mathbb{R}^n$ の距離をそれぞれ d_1, d_p, d_∞ と書く.

事実

d_p $(p \geqq 1)$, d_∞ は互いに同値な距離.

$$|x|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \leqq n \times \max\{|x_1| \cdots |x_n|\}$$

$$\geqq \max\{|x_1| \cdots |x_n|\}$$

$$|x|_\infty \leqq |x_1| \leqq n\,|x|_\infty$$

$$d_\infty(x,y) \leqq d_1(x,y) \leqq n\, d_\infty(x,y)$$

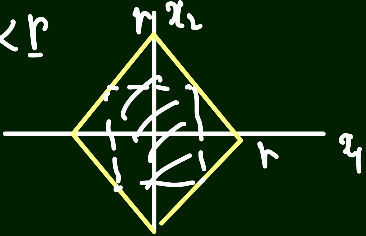
d_1 と d_∞ は同値なきょりをあたえる、

$\underline{n=2}$

d_1 に関する開球体 $B^1(0,r)$

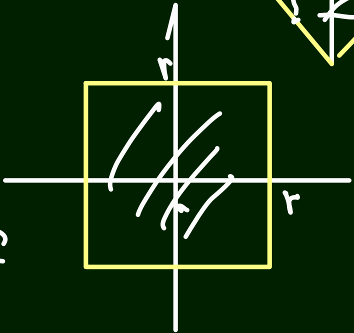
$= \{ y \in \mathbb{R}^2 ; d_1(0,y) = |y|_1 < r \}$

$|x_1| + |x_2| < r$



l^∞ $d^\infty(0,r)$

$\max\{|x_1|, |x_2|\} < r$



$$B^\infty\left(0,\frac{r}{2}\right) \subset B^1(0,r) \subset B^\infty(0,r)$$

$$\left(d_\infty \leqq d_1 \leqq 2\, d_\infty\right)$$

S° : d_1で測ってもd_∞で測っても同じ

$= \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, B(x,\varepsilon) \subset S$ となる $\varepsilon > 0$ が存在$\}$

∂S

S^e

同値な距離は 同じ S° S^e ∂S をあたえる

$x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$d_{disc}(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

離散距離

discrete

$$B(x, r) = \begin{cases} \mathbb{R}^n & \text{if } r > 1 \\ \{x\} & \text{if } r \leq 1 \end{cases}$$

$$\rotatebox{90}{$=$}$$

$$\{y \,;\, d_{disc}(x, y) < r\}$$

点列 $\{x_n\}$ が x に収束する

$\Leftrightarrow$ ある番号から先 $x_n = x$

前のスライドの距離と同値でない。

$C(I)$ のいろいろな距離

∞次元

$I \subset \mathbb{R}$：閉区間；$C(I)$：I 上連続な実数値関数全体のなす集合.

例 (例 15:4)

$f \in C(I)$：

- $||f||_1 := \int_I |f(t)|\, dt$
- $||f||_p := \left(\int_I |f(t)|^p\, dt \right)^{1/p}$
- $||f||_\infty := \max_{x \in I} |f(x)|$

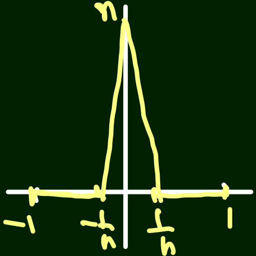
これらから決まる $C(I)$ の距離をそれぞれ d_1, d_p, d_∞ と書く.

事実

d_p $(p \geqq 1)$, d_∞ は互いに同値でない.

$I = [-1, 1]$

$f_n(x) =$



$n = 1, 2, \cdots$

$$\|f_n\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_n(t)|\,dt = 1$$

$$\|f_n\|_\infty = \max_{-1 \leq t \leq 1} |f_n(t)| = n$$

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} \to \infty$$

$\|\ \|_\infty$と$\|\ \|_1$は同値でない

距離空間；球体

(X, d)：距離空間；

$x \in B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n\,;\, d(x, y) < r\}$　中心 x, 半径 r の開球体

$S \subset X$；$x \in X$；

Sの内点 $\in S$

- x が S の内点 $\Leftrightarrow$ $B(x, \varepsilon) \subset S$ を満たす数 $\varepsilon > 0$ が存在.
- x が S の外点 $\Leftrightarrow$ x は S^c の内点.　Sの外点 $\in S^c$
- x が S の境界点 $\Leftrightarrow$ x は S の内点でも外点でもない

$$S^\circ := \{x\,;\, x \text{ は } S \text{ の内点}\} \subset S \qquad S \text{ の内部}$$
$$S^e := \{x\,;\, x \text{ は } S \text{ の外点}\} \subset S^c \qquad S \text{ の外部}$$
$$\partial S := \{x\,;,\, x \text{ は } S \text{ の境界点}\} \qquad S \text{ の境界}$$

$S^\circ \cap S^e = \phi$

$X = S^\circ \cup \partial S \cup S^e$（非交和）

内部

$\circ : 2^X \longrightarrow 2^X$

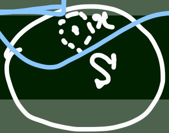
内部をとる
開核作用素

(X, d)：距離空間；$S, T \subset X$

- $X^\circ = X$
- $S^\circ \subset S$
- $(S^\circ)^\circ = S^\circ$
- $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$

触点と閉包

$X = S^\circ \cup \partial S \cup S^e$



触点

(X,d)：距離空間；$S \subset X$

定義

$x \in X$ が S の触点 $\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $S \cap B(x,\varepsilon) \neq \varnothing$

- $x \in S^\circ$ は S の触点　$\because\ x \in S^\circ \Rightarrow x \in S \Rightarrow B(x,\varepsilon) \cap S \ni x$
- $x \in \partial S$ は S の触点
- $x \in S^e$ は S の触点ではない．

$\overline{S} = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, x$ は S の触点$\} = S \cup \partial S$　　(S の閉包)

closure

$\because$ もしも $\exists \varepsilon$　$B(x,\varepsilon) \cap S = \phi \Rightarrow B(x,\varepsilon) \subset S^c$

$\therefore$ x は S の外点

閉包

$\overline{} : 2^X \ni S \longmapsto \overline{S} \in 2^X$

(X, d)：距離空間；$S, T \subset X$

- $\overline{\varnothing} = \varnothing$
- $S \subset \overline{S}$
- $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$
- $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$

$X^\circ = X$

$S^\circ \subset S$

$S^{\circ\circ} = S^\circ$

$(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$

$\overline{S} = \{(S^c)^\circ\}^c$

$X = \overbrace{S^\circ \cup \partial S}^{\overline{S}} \cup \underbrace{S^e}_{} = (\overline{S})^e \cup \partial S^c \cup \underbrace{(S^c)^\circ}_{}$

12:05 再開

______時______分 に再開します.