位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

開集合・閉集合

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2

東京工業大学理学院数学系

2024/07/16

$\mathbb{R}^n$ のいろいろな距離

例 (例 15:4)

$\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \ldots, x_n)$；

- $\displaystyle |x|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$
- $\displaystyle |x|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} \quad (p \geqq 1)$
- $|x|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$

これらから決まる $\mathbb{R}^n$ の距離をそれぞれ d_1, d_p, d_∞ と書く.

事実

d_p $(p \geqq 1)$, d_∞ は互いに同値な距離.

$C(I)$ のいろいろな距離

$I \subset \mathbb{R}$：閉区間；$C(I)$：I 上連続な実数値関数全体のなす集合.

例 (例 15:4)

$f \in C(I)$：

- $||f||_1 := \int_I |f(t)|\,dt$
- $||f||_p := \left(\int_I |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$
- $||f||_\infty := \max_{x \in I} |f(x)|$

これらから決まる $C(I)$ の距離をそれぞれ d_1, d_p, d_∞ と書く.

事実

d_p $(p \geqq 1)$，d_∞ は互いに同値でない.

距離空間；球体

(X, d)：距離空間；

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n\,;\, d(x, y) < r\} \quad \text{中心 } x\text{, 半径 } r \text{ の開球体}$$

$S \subset X$；$x \in X$；

- x が S の内点 $\Leftrightarrow$ $B(x, \varepsilon) \subset S$ を満たす数 $\varepsilon > 0$ が存在.
- x が S の外点 $\Leftrightarrow$ x は S^c の内点.
- x が S の境界点 $\Leftrightarrow$ x は S の内点でも外点でもない

$$\begin{aligned} S^\circ &:= \{x\,;\, x \text{ は } S \text{ の内点}\} && S \text{ の内部} \\ S^e &:= \{x\,;\, x \text{ は } S \text{ の外点}\} && S \text{ の外部} \\ \partial S &:= \{x\,;\,, x \text{ は } S \text{ の境界点}\} && S \text{ の境界} \end{aligned}$$

$X = S^\circ \cup \partial S \cup S^e$（非交和）

内部

(X, d)：距離空間；$S, T \subset X$

- $X^\circ = X$
- $S^\circ \subset S$
- $(S^\circ)^\circ = S^\circ$
- $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$

触点と閉包

(X, d)：距離空間；$S \subset X$

定義

$x \in X$ が S の<u>触点</u> $\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $S \cap B(x, \varepsilon) \neq \varnothing$

- $x \in S^\circ$ は S の触点
- $x \in \partial S$ は S の触点
- $x \in S^e$ は S の触点ではない.

$\overline{S} := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, x$ は S の触点$\} = S \cup \partial S$　　(S の閉包)

閉包

(X, d)：距離空間；$S, T \subset X$

- $\overline{\varnothing} = \varnothing$
- $S \subset \overline{S}$
- $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$
- $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$

______時______分 に再開します.