

位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

開集合・閉集合

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

`http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2`

東京工業大学理学院数学系

2024/07/16

開集合・閉集合

(X, d) : 距離空間 ; $S \subset X$

定義 (定義 13.4)

- ▶ S が開集合 $\Leftrightarrow S = S^\circ$.
- ▶ S が閉集合 $\Leftrightarrow S = \bar{S}$.

- ▶ X は開集合, X は閉集合.
- ▶ \emptyset は開集合, \emptyset は閉集合.

開 \supset 閉

Rem S° : open
 $\odot S^{\circ\circ} = S^\circ$
 \bar{S} : closed
 $\odot \bar{\bar{S}} = \bar{S}$

open
closed

$(\mathbb{R}^2, \text{Euclid } \|\cdot\|)$

$$\left. \begin{aligned} S &= \{B(0,1)\} \text{ open} \\ S^\circ &= \{x^2 + y^2 < 1\} \\ \partial S &= \{x^2 + y^2 = 1\} \\ \bar{S} &= \text{closed } S^\circ = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \end{aligned} \right\}$$

$$(\mathbb{R}, d) \quad d(x, y) = |y - x|$$

$$(a < b)$$

(a, b) : open

$[a, b]$: closed

(a, ∞) : open

$[a, \infty)$: closed

$[a, b)$: open \mathbb{Z} & closed \mathbb{Z} & \mathbb{R} .

命題 (命題 14.3)

- ▶ S° は S の最大の開部分集合である. $\text{open } S^\circ \subset S$
- ▶ \bar{S} は S を部分集合として含む最小の閉集合である.

$T: S$ の部分集合, $\text{open} \Rightarrow T \subset S^\circ$

$V: V \supset S$, $\text{closed} \Rightarrow V \supset \bar{S}$

開集合・閉集合と補集合

定理 (定理 14.4)

- ▶ 開集合の補集合は閉集合.
- ▶ 閉集合の補集合は開集合

$$\begin{aligned} S : \text{open} &\Rightarrow S^\circ = S \\ &\Rightarrow (S^\circ)^c = S^c \\ &\Rightarrow \overline{S^c} = \overline{(S^\circ)^c} \\ &= \{(S^\circ)^c\}^{c \circ c} \\ &= S^c \end{aligned}$$

開集合系

位相空間：“開集合系”から与えられる集合

- (X, d) : 距離空間
- $\mathcal{O} := \{S \subset X; S \text{ は開集合}\} \subset 2^X$: 開集合系

位相空間

(X, \mathcal{O})
 2^X

\mathcal{O} は左の3つと
一致

定理 (定理 14.8)

- ▶ $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- ▶ $S_1, S_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow S_1 \cap S_2 \in \mathcal{O}$ (任意)
- ▶ $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} : \mathcal{O}$ の集合族 $\Rightarrow \bigcup S_\lambda \in \mathcal{O}$

• $\bigcap S_\lambda \in \mathcal{O}$ とは限らばない。

e.g. (\mathbb{R}, d) ; $S_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

$\bigcap S_n = \{0\}$: open じゃない

閉集合系

(X, d) : 距離空間

$\mathcal{A} := \{T \subset X; S \text{ は閉集合}\} \subset 2^X$: 閉集合系

定理 (定理 14.11)

- ▶ $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
- ▶ $T_1, T_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow T_1 \cup T_2 \in \mathcal{A}$
- ▶ $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} : \mathcal{A}$ の集合族 $\Rightarrow \bigcap T_\lambda \in \mathcal{A}$

本日の課題の提出締切は

2024年07月11日（木曜日）07:00 JST