2024 年 07 月 16 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

位相空間論第二（講義）(MTH.B202) 講義資料 6

■お知らせ

- 6 名の方から課題提出がありました．T2SCHOLA にて返却しておりますのでご確認ください．用紙に記入されているコメントは山田用のメモです．読めないかもしれませんが，この資料に回答やコメントがありますのでそちらを参照してください．
- T2SCHOLA の学修アンケートにご協力願います．現在 0/41 件（2024 年 7 月 8 日 08:40 時点）の回答をいただいています．

定期試験予告

日時： 2024 年 7 月 30 日（火）**10 時 50 分〜12 時 20 分**（90 分）
試験開始 5 分前には指定の座席（当日指示する）に着席すること

場所： **本館；M-B104**（授業が行われている教室）

範囲： 主として 7 月 23 日までの授業で扱った内容.

返却： 答案は T2SCHOLA より返却する．採点に関するクレイム・議論はメイルにて期限を限って受け付ける．詳細は試験問題に記す．なお，評価の対象は試験の答案と提出物の答案に書かれたもののみとする．

評価： 60 点満点．演習の評価 40 点と合計して成績を決定する．試験の得点が思わしくない人は提出物の得点に重みをつけて加味することがある．詳細は試験返却の際に指示する．

持込： 指定用紙 1 枚の表裏に好きなことを書き込んで持ち込んでよい.

- 用紙の pdf は T2SCHOLA，講義 web からダウンロードできる.
- 用紙への直接のコピーや他の用紙の貼付は不可.
- 用紙は試験終了後回収するので学籍番号・氏名を明記すること.

禁止事項： 携帯電話，スマートフォン，糸電話，狼煙を見るための双眼鏡など**外部と通信する機器**, パーソナルコンピュータ・スーパーコンピュータなど**電源を必要とする機器**, 数学が得意な友人などの**生き物**など，指定用紙と筆記用具以外は持ち込み禁止.

- やむを得ない理由で**試験を受けられない方**は，**試験前**までに電子メイルにてご連絡ください.
- 連絡なしに試験を欠席された方は，**単位を得る権利を失います**.

授業に関する御意見

- ノルムを “距離” と捉えてしまっていたので，内積も含めて 3 つの関係性を整理することができてよかった.
  山田のコメント： はい.
- 7/11 しめきりということで . . . コンビニのオススメ商品は何ですか？　**山田のコメント：** チケット受けとり.
- この授業だけは，なんとか 1Q2Q 通してすべて出席できそうです．うれしいです.
  山田のコメント： ありがとうございます.

■質問と回答

質問 1： 今回の講義で登場した「球面」や「球体」の定義において，「マイナスの次元」である球面や球体を考えることはありますか．

お答え： 負の次元の多様体が考えられるか，ということですね．どうもそういうことはあるようです（が，詳しくは知らない）．

質問 2： $\mathbb{R}^2$ の部分集合 S について，S の境界が $\mathbb{R}^2$ となるような例は $S=\mathbb{Q}^2$ があるあたりいくらでもありそうですが，S の内部および外部が $\mathbb{R}^2$ となるのは，それぞれ $S=\mathbb{R}^2$, $S=\varnothing$ のとき以外あるのでしょうか．また，一般の $\mathbb{R}^n$ でもそのことについて同様に言えるのでしょうか．

お答え： $S^\circ\subset S$, $S^e\supset S^c$ から明らか．

質問 3： ユークリッド空間と，そうでない一般の距離空間で，同じ集合 X の部分集合 S の内部・外部・境界を考えたとき，これらすべてが同じになることはあるのでしょうか．

お答え： 内部でも外部でもないのが境界なので，ない．

質問 4： n 次元ユークリッド空間で成り立つ性質は一般の距離空間でも成り立つと思うが，その証明は内点や外点などの定義が同じだからで十分なのか．

お答え： 証明でユークリッド空間特有の性質（たとえば，内積や中線定理）を使っていなければ OK.

質問 5： 内積の定義の説明の際，コーシー・シュワルツの不等式から，$|\langle x,y\rangle|\leqq\|x\|\|y\|$ から，角度が well-defined とおしえてもらったが，Arccos を使うことは分かるが，不等式を用いているのに，関数が一意的に定まるのかが疑問に思ったので，well-defined となる関数は，どのような関数でどのようにして不等式を用いていますか．

お答え： $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ のとき，Cauchy–Schwarz から $-1\leqq\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}\leqq 1$. したがって $\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}=\cos\theta$ となる $\theta\in[0,\pi]$ が唯一つ定まる．

質問 6： $\mathbb{R}^n$ の球面と球体はどちらも $\mathbb{R}^n$ の部分集合だが次元が異なるとのことですが，一般の距離空間 X の部分集合，点 $x\in X$ を中心として半径 $r>0$ の開球体 $\{y\in X\mid d(x,y)<r\}$ と球面 $\{y\in X\mid d(x,y)=r\}$ を同じように特徴づけることは可能ですか．

お答え： “同じように” とは具体的にどのように？