位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

連続写像

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2

東京工業大学理学院数学系

2024/07/16

距離空間；球体

(X, d)：距離空間；

$$B(x, r) := \{y \in \overset{X}{\cancel{\mathbb{R}^n}} \,;\, d(x, y) < r\} \quad \text{中心 } x\text{, 半径 } r \text{ の開球体}$$

$S \subset X$；$x \in X$；

- x が S の<u>内点</u> $\Leftrightarrow$ $B(x, \varepsilon) \subset S$ を満たす数 $\varepsilon > 0$ が存在.
- x が S の<u>外点</u> $\Leftrightarrow$ x は S^c の内点.
- x が S の<u>境界点</u> $\Leftrightarrow$ x は S の内点でも外点でもない

$$S^\circ := \{x \,;\, x \text{ は } S \text{ の内点}\} \qquad S \text{ の内部.}$$

$$S^e := \{x \,;\, x \text{ は } S \text{ の外点}\} \qquad S \text{ の外部.}$$

$$\partial S := \{x \,;\, , x \text{ は } S \text{ の境界点}\} \qquad S \text{ の境界.}$$

$X = S^\circ \cup \partial S \cup S^e$ （非交和）

$\overline{S} = S \cup \partial S$

開集合

(X, d)：距離空間

- S が<u>開集合</u> $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $S = S^\circ$
- S が<u>閉集合</u> $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $S = \overline{S}$

事実

S が閉集合 $\Leftrightarrow$ S^c が開集合.

$$X = \underline{S^\circ} \cup \underline{\partial S} \cup \underbrace{S^e}_{= (S^c)^\circ}$$

$\mathbb{R}$ の距離

$\mathbb{R} \ni x, y$ に対して $d(x, y) = |y - x|$ と定めると，これは $\mathbb{R}$ の距離を与える．(<u>標準距離</u>).
とくに断らない限り，$\mathbb{R}$ には標準距離が与えられているとする．

- $B(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}\,;\, |x - a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
- 開区間 (a, b) は開集合．
- 閉区間 $[a, b]$ は閉集合．
- $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ は開集合．
- $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$ は閉集合．
- 1 点集合 $\{a\}$ は閉集合．

部分距離空間

$d : X \times X \to \mathbb{R}$
$\cup$
$S \times S$

(X, d)：距離空間；$S \subset X$.

事実

S は，d の制限

$$d' := d|_{S\times S} : S \times S \ni (x, y) \to d(x, y) \in \mathbb{R}$$

により距離空間となる.

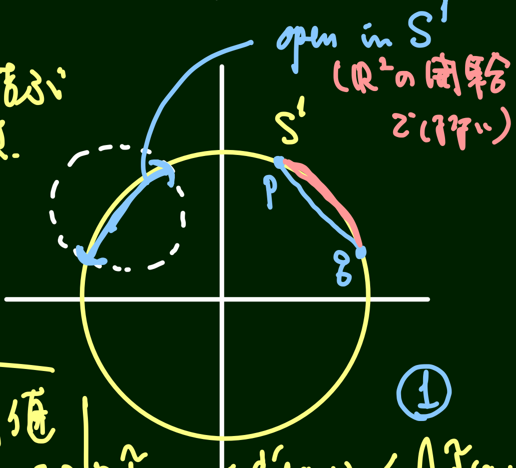
とくに断りのない限り，距離空間の部分集合にはこのような距離が与えられているとする.

$\mathbb{R}^2 \supset S^1 = \{(x,y) \,;\, x^2+y^2=1\}$

Euclid きょり

$d' = d|_{S^1\times S^1}$: 2点を結ぶ弦の長さ.

$\tilde{d}$ = 2点を結ぶ劣弧の長さ



Q: d' と $\tilde{d}$ は同値な距離を与えるか? $B\tilde{d}(x,y) \le d'(x,y) \le A\tilde{d}(x,y)$

$\mathbb{R}^3 \supset S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 ; |x| = 1\}$ 球面

中心を通る
平面との
共通部分

d' : Euclid 距離の制限.

$\tilde{d}(x, y) =$ 2点 x, y を結ぶ大円の劣弧の長さ

$$= \cos^{-1}\langle x, y\rangle$$

Q: $\tilde{d}, d'$ は S^2 の同値なきょり

$B'(a,r) = \{x \in S \,;\, d'(a,x) < r\}$

$= \{x \in S \,;\, d(a,x) < r\}$

(X, d) : 距離空間 ; $S \subset X$
d' : d の $S \times S$ への制限 ; $B'(a,r)$: (S, d') の開球.

- $B'(a,r) = B(a,r) \cap S$
- $A \subset S$ が (S, d') の開集合 $\Leftrightarrow$ ある X の開集合 $\widetilde{A}$ で $A = \widetilde{A} \cap S$ となるものが存在する.

$= \{x \in X \,;\, d(a,x) < r\} \cap \{x \in S\}$

例 :

- $(0, 1]$ は $[-1, 1]$ の開集合.

$X = \mathbb{R}$

$S = [-1, 1]$

(S, d') の開集合 $\to$ $\mathbb{R}$ の開集合

$B'(\frac{1}{2}, 1) = \{x \in S \,;\, |x - \frac{1}{2}| < 1\} = (-\frac{1}{2}, 1]$

$= (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \cap S$

連続関数（復習）

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$：関数

定義

f が $a \in \mathbb{R}$ で連続

- $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- $\Leftrightarrow$ 任意の正の数 ε に対して，正の数 δ が存在して $|x-a| < \delta$ を満たす任意の x に対して $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$
- $\Leftrightarrow$ 任意の正の数 ε に対して，正の数 δ が存在して $B(a,\delta) \subset f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))$

$x \in f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))$

$d(f(a),f(x)) < \varepsilon$

$d(a,x) < \delta$

$x \in B(a,\delta)$

$f(x) \in B(f(a),\varepsilon)$

連続写像（定義）

(X, d_X), (Y, d_Y)：距離空間　$f\colon X \to Y$：写像

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

定義 (定義 15.21)

f が $a \in X$ で連続
$\Leftrightarrow$ 任意の正の数 ε に対して，正の数 δ が存在して $d_X(a, x) < \delta$ を満たす任意の x に対して $d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$ を満たす．

定義

f が <u>連続</u> $\Leftrightarrow$ f は X の各点で連続

11 時 50 分 に再開します．