

位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

連続写像

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

<http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2>

東京工業大学理学院数学系

2024/07/16

距離空間；球体

(X, d) : 距離空間；

$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n ; d(x, y) < r\}$ 中心 x , 半径 r の開球体

$S \subset X ; x \in X ;$

- ▶ x が S の内点 $\Leftrightarrow B(x, \varepsilon) \subset S$ を満たす数 $\varepsilon > 0$ が存在.
- ▶ x が S の外点 $\Leftrightarrow x$ は S^c の内点.
- ▶ x が S の境界点 $\Leftrightarrow x$ は S の内点でも外点でもない

$S^\circ := \{x ; x \text{ は } S \text{ の内点}\}$ S の内部

$S^e := \{x ; x \text{ は } S \text{ の外点}\}$ S の外部

$\partial S := \{x ; x \text{ は } S \text{ の境界点}\}$ S の境界

$X = S^\circ \cup \partial S \cup S^e$ (非交和)

開集合

(X, d) : 距離空間

▶ S が開集合 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} S = S^\circ$

▶ S が閉集合 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} S = \bar{S}$

事実

S が閉集合 $\Leftrightarrow S^c$ が開集合.

\mathbb{R} の距離

$\mathbb{R} \ni x, y$ に対して $d(x, y) = |y - x|$ と定めると、これは \mathbb{R} の距離を与える。(標準距離).

とくに断らない限り、 \mathbb{R} には標準距離が与えられているとする.

- ▶ $B(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < \varepsilon\}$
- ▶ 开区間 (a, b) は開集合.
- ▶ 閉区間 $[a, b]$ は閉集合.
- ▶ $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ は開集合.
- ▶ $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$ は閉集合.
- ▶ 1点集合 $\{a\}$ は閉集合.

部分距離空間

(X, d) : 距離空間 ; $S \subset X$.

事実

S は, d の制限

$$d' := d|_{S \times S} : S \times S \ni (x, y) \rightarrow d(x, y) \in \mathbb{R}$$

により距離空間となる.

とくに断りのない限り, 距離空間の部分集合にはこのような距離が与えられているとする.

部分距離空間

(X, d) : 距離空間 ; $S \subset X$

d' : d の $S \times S$ への制限 ; $B'(a, r) : (S, d')$ の開球.

- ▶ $B'(a, r) = B(a, r) \cap S$
- ▶ $A \subset S$ が (S, d') の開集合 \Leftrightarrow ある X の開集合 \tilde{A} で $A = \tilde{A} \cap S$ となるものが存在する.

例 :

- ▶ $(0, 1]$ は $[-1, 1]$ の開集合.

連続関数（復習）

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: 関数

定義

f が $a \in I$ で連続

- ▶ $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- ▶ \Leftrightarrow 任意の正の数 ε に対して、正の数 δ が存在して $|x - a| < \delta$ を満たす任意の x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$
- ▶ \Leftrightarrow 任意の正の数 ε に対して、正の数 δ が存在して $B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$

連続写像 (定義)

$(X, d_X), (Y, d_Y)$: 距離空間 ; $f: X \rightarrow Y$: 写像

定義 (定義 15.21)

f が $a \in X$ で連続

\Leftrightarrow 任意の正の数 ε に対して, 正の数 δ が存在して $d_X(a, x) < \delta$ を満たす任意の x に対して $d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$ を満たす.

定義

f が 連続 $\Leftrightarrow f$ は X の各点で連続

_____時_____分に再開します.