位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

連続写像

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2

東京工業大学理学院数学系

2024/07/16

連続関数

(X, d)：距離空間；　　前まで習ったのは $X=\mathbb{R}$の場合

事実

$f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon X \to \mathbb{R}$：連続写像（連続関数）. $\Rightarrow$

- $f \pm g\colon X \to \mathbb{R}$ は連続.
- $fg\colon X \to \mathbb{R}$ は連続.
- $\dfrac{f}{g}\colon X \to \mathbb{R}$ は連続．ただし $0 \notin g(X)$ とする.

連続関数

$(\mathbb{R}^n, d)$：ユークリッド空間；$1 \leqq i \leqq n$：番号

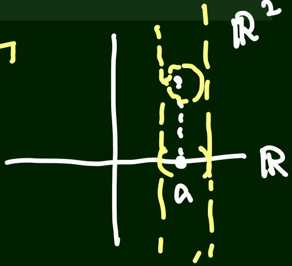
事実

$x_i : \mathbb{R}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i \in \mathbb{R}$ は連続.

系

$\mathbb{R}^n$ 上の多項式で与えられる関数は連続.

有理式 (分母 $\neq 0$ で)



連続写像と開集合・閉集合

(X, d_X), (Y, d_Y)：距離空間；$f\colon X \to Y$：写像

〜略化できる

定理 (定理 15.23)

次は同値

- f は連続
- 任意の Y の開集合 V に対して $f^{-1}(V) \subset X$ は開集合.
- 任意の Y の閉集合 A に対して $f^{-1}(A) \subset X$ は閉集合.

きょりを使わず
開集合のみで のべることが
できる

f が連続でも、 f(開) は開とは限らない

e.g. 定値写像

f: 連続 $\Leftrightarrow$ 任意の $V \subset Y$ (開) に対して $f^{-1}(V)$ は開

"$\Rightarrow$" f が a で連続

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \underline{B(a, \delta)} \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$

$\subset f^{-1}(V)$

$f^{-1}(V) \ni a$ をとってくると

$B(a, \delta) \subset f^{-1}(V) \quad \therefore f^{-1}(V)$: open.

"$\Leftarrow$" $a \in X$ としたとき f が a で連続であることを示す。任意の ε に対して

$V = B(f(a), \varepsilon)$ とすると、$\underset{\substack{\in \\ a}}{f^{-1}(V)}$: open

したがって $B(a, \delta) \subset f^{-1}(V)$

となる $\delta > 0$ が存在する。

例

関数

$f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: 連続写像 $(j = 1, \ldots, k)$. このとき,

V $\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, f_1(x) > 0, \ldots, f_k > 0\} \subset \mathbb{R}^n$ は開.

W $\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, f_1 \geqq 0, \ldots, f_k \geqq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ は閉.

$$V = \underbrace{f_1^{-1}(\underbrace{(0,\infty)}_{\text{open}})}_{\text{open}} \cap \underbrace{f_2^{-1}((0,\infty))}_{} \cap \cdots \cap \underbrace{f_k^{-1}((0,\infty))}_{}$$

有限個

open

$$W = \underbrace{f_1^{-1}(\underbrace{[0,\infty)}_{\text{closed}})}_{\text{closed}} \cap \cdots \cap f_k^{-1}([0,\infty))$$

$\{(x,y);\ x^2+y^2<1\}$: 開

$f_1 = 1-x^2-y^2$

closed

$\{(x,y);\ x^2+y^2\leqq 1\}$: 閉

$\{(x,y);\ x^2+y^2=1\} = f_1^{-1}(\{0\})$

閉

例

$\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：$n\times n$ 実正方行列全体 $= \mathbb{R}^{n^2}$

$\|A\| := \sqrt{\operatorname{tr}{}^tAA}$：ユークリッドノルム.

- $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{A\in M(n,\mathbb{R});\ A$ は正則$\} \subset M(n,\mathbb{R})$ open
- $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{A\in M(n,\mathbb{R});\ \det A = 1\} \subset M(n,\mathbb{R})$ closed

$\det : M(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ 行列式

連続 (多項式)

$GL(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\overbrace{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^{\text{open}})$ $(0,\infty)\cup(-\infty,0)$

? ・ $M(n,\mathbb{R}) = \overline{GL(n,\mathbb{R})}$

例

V：実ベクトル空間；$\|\cdot\|$：V のノルム．

事実

任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して

中線定理

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=2\left(\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2\right)$$

が成り立つなら，V の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ で $\|\boldsymbol{x}\|^2=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle$ を満たすものが存在する．

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\left\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right\}$$

対称性　正値性

$$\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$$ 易しい

・ $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

① $y \longmapsto \langle x, y \rangle$: 連続

$x \longmapsto \|x\|$ が連続

② $\langle x, 2^n y \rangle = 2^n \langle x, y \rangle \quad (n \in \mathbb{Z})$

$\because$ $\langle x, 2y \rangle = \langle x, y + y \rangle$

$\langle x, \frac{1}{2} y \rangle + \langle x, \frac{1}{2} y \rangle = \langle x, y \rangle$

③ $\lambda = \sum_{n=n_0}^{\infty} \mu_n 2^{-n} \quad (\mu_n = 0, 1)$

$\langle x, \lambda y \rangle = \sum \mu_n 2^{-n} \langle x, y \rangle$

~~本日の課題の提出締切は~~

ご聴講ありがとうございました.