位相空間論第二（講義）(MTH.B202)

連続写像

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-2

東京工業大学理学院数学系

2024/07/16

連続関数

(X, d)：距離空間；

事実

$f\colon X \to \mathbb{R},\ \ g\colon X \to \mathbb{R}$：連続写像（連続関数）．$\Rightarrow$

- $f \pm g\colon X \to \mathbb{R}$ は連続.
- $fg\colon X \to \mathbb{R}$ は連続.
- $\dfrac{f}{g}\colon X \to \mathbb{R}$ は連続．ただし $0 \notin g(X)$ とする．

連続関数

$(\mathbb{R}^n, d)$：ユークリッド空間；$1 \leqq i \leqq n$：番号

事実

$x_i \colon \mathbb{R}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i \in \mathbb{R}$ は連続.

系

$\mathbb{R}^n$ 上の多項式で与えられる関数は連続.

連続写像と開集合・閉集合

(X, d_X), (Y, d_Y)：距離空間；$f\colon X \to Y$：写像

定理 (定理 15.23)

次は同値

- f は連続
- 任意の Y の開集合 V に対して $f^{-1}(V) \subset X$ は開集合.
- 任意の Y の閉集合 A に対して $f^{-1}(A) \subset X$ は閉集合.

例

$f_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$：連続写像 $(j = 1, \ldots, k)$. このとき,

- $\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, f_1 > 0, \ldots, f_k > 0\} \subset \mathbb{R}^n$ は開.
- $\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, f_1 \geqq 0, \ldots, f_k \geqq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ は閉.

例

$\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：$n\times n$ 実正方行列全体
$||A|| := \sqrt{\mathrm{tr}\,{}^tAA}$：ユークリッドノルム.

- $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$
- $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$

例

V：実ベクトル空間；$||\cdot||$：V のノルム.

事実

任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = 2\left(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2\right)$$

が成り立つなら，V の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ で $||\boldsymbol{x}||^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$ を満たすものが存在する.