

日本数学会幾何学分科会主催
神戸大学大学院理学研究科数学専攻共催
第57回幾何学シンポジウム

日程： 2010年8月6日(金)～9日(月)

会場： 神戸大学百年記念館六甲ホール
神戸大学理学部 Z201/202

組織責任者： 山田 光太郎 (東京工業大学大学院理工学研究科)
芥川 和雄 (東北大学大学院情報科学研究科)
小谷 元子 (東北大学大学院理学研究科)
成 慶明 (佐賀大学大学院理工学系研究科)
ラスマン ウェイン (神戸大学大学院理学研究科)

— プログラム —

- A 会場：百年記念館六甲ホール
- B 会場：理学部 Z201/202

* パラレル・セッションはすべて30分講演で、間に休憩をはさまずに連続して行います。

■8月6日(金)

15:00-15:50	A 会場	西納 武男 (東北大学)	1
		Correspondence theorems for tropical curves	
16:10-17:00	A 会場	Xia Changyu (Universidade de Brasília)	11
		Sobolev type inequalities on Riemannian manifolds	

■8月7日(土)

9:30-10:20	A 会場	笹平 裕史 (名古屋大学)	19
		レンズ空間のインスタントン Floer ホモロジー	
10:40-11:30	A 会場	野原 雄一 (香川大学)	29
		Toric degenerations of polygon spaces and bending flows	
13:00-13:50	A 会場	吉岡 康太 (神戸大学)	37
		代数曲面の Donaldson 不変量について	
14:15-15:15	A 会場	豊田 哲 (名古屋大学)	43
		コンパクトな群作用を持つ CAT(0) 空間に対する固定点性質	
	A 会場	田中 守 (東北大学)	49
		狭義凸 Banach 空間へのアフィン等長作用の固定点の存在について	
14:15-15:15	B 会場	藤森 祥一 (福岡教育大学)	53
		Minkowski 空間の向き付け不可能な極大曲面について	
	B 会場	直川 耕祐 (大阪大学)	59
		可展的な Möbius の帯の漸近的完備化上に現れる特異点	

■8月7日(土)

15:45-16:45	A 会場	船野 敬(熊本大学)	63
		測度の集中現象とラプラシアン固有値の挙動	
	A 会場	服部 多恵(金沢大学)	67
		p -ディリクレ和有限関数と無限グラフの幾何	
15:45-16:45	B 会場	川上 裕(九州大学)	71
		非固有アファイン波面のガウス写像の除外値問題について	
	B 会場	庄田 敏宏(佐賀大学)	77
		周期的極小曲面の諸性質について	
17:00-18:00	A 会場	栗原 大武(東北大学)	79
		コンパクト対称空間上のデザイン	
	A 会場	高倉 樹(中央大学)	85
		On a vector partition function with negative weights	
17:00-18:00	B 会場	森山 貴之(京都大学)	89
		葉層多様体における横断的 Calabi-Yau 構造のモジュライ空間	
	B 会場	吉田 尚彦(明治大学)	93
		Torus fibrations and localization of index	

■8月8日(日)

9:00-10:20	A 会場	小野 肇(東京理科大学)	99
		偏極トーリック多様体のチャウ半安定性について	
10:40-11:30	A 会場	小野 薫(北海道大学)	107
		Compact toric 多様体上の Lagrangian Floer theory について	
13:00-14:00	A 会場	藤井 忍(広島大学/OCAMI)	119
		球面内の等径超曲面と運動量写像: Hermite 対称空間の場合	
	A 会場	加藤 宏尚(広島大学)	124
		概均質ベクトル空間と等質空間上の不変平坦な幾何構造	
13:00-14:00	B 会場	佐藤 弘康(東京電機大学)	129
		Damek-Ricci 空間内のホロ球面の主曲率について	
	B 会場	Euh Yunhee(韓国成均館大学)	133
		Curvature identities derived from the generalized Gauss-Bonnet formula	
14:15-15:15	A 会場	田崎 博之(筑波大学)	135
		コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉	
	A 会場	Sorin Sabau(東海大学)	140
		Generalized Finsler structures on 3-manifolds	
14:15-15:15	B 会場	入江 慶(京都大学)	145
		Handle attaching in wrapped Floer homology and brake orbits in classical Hamiltonian systems	
	B 会場	多羅間 大輔(京都大学)	150
		自由剛体の固有ベクトル写像と Kummer 曲面	

■8月8日(日)

15:45-16:45	A 会場	服部 広大 (東京大学) A_∞ 型超ケーラー多様体の体積増大度	155
	A 会場	新田 泰文 (立命館大学) 偏極多様体の相対安定性について	160
15:45-16:45	B 会場	松尾 信一郎 (東京大学) Kolmogorov 複雑性と平均次元とゲージ理論	165
	B 会場	塚本 真輝 (京都大学) インスタントンを持たない開 4 次元多様体	170
17:00-18:00	A 会場	四ツ谷 直仁 (名古屋大学) Hilbert 級数による漸近的 Chow 不安定な Kahler-Einstein 多様体の示し方	175
	A 会場	中田 文憲 (東京理科大学) 波動方程式と LeBrun-Mason 対応について	180
17:00-18:00	B 会場	本多 正平 (京都大学) 非負曲率多様体上の調和関数とグロモフ・ハウスドルフ収束	185
	B 会場	近藤 慶 (東海大学) チーガーとコールディングの微分同型定理の拡張について	190

■8月9日(月)

09:30-10:30	A 会場	深谷 友宏 (京都大学) Dynamical Morse inequality	195
	A 会場	伊藤 和貴 (東北大学) サブリーマン多様体の位相的分裂定理	200
09:30-10:30	B 会場	濱田 龍義 (福岡大学) Lie hypersurfaces in the complex hyperbolic space	205
	B 会場	Wang Qiaoling (Universidade de Brasília) Complete submanifolds in manifolds of non-negative or non-positive curvature	210
10:45-11:45	A 会場	横田 巧 (京都大学) リッチ流と第 2 種曲率作用素が正の多様体	211
	A 会場	野田 尚廣 (名古屋大学/OCAMI) Second order type-changing equations for a scalar function on a plane	214
10:45-11:45	B 会場	柳井 佳奈 (お茶の水女子大学) 1 変数複素微分同相群の語の問題	219
	B 会場	恩田 健介 (名古屋大学/OCAMI) リー群上の左不変ローレンツ計量とリッチソリトンについて	225
13:00-13:50	A 会場	本多 宣博 (東北大学) Joyce 計量から生じるミニツイスター空間	229
14:10-15:00	A 会場	長友 康行 (九州大学) 対称空間上のベクトル束, 等径関数とラドン変換	239

CORRESPONDENCE THEOREMS FOR TROPICAL CURVES

TAKEO NISHINO

1. INTRODUCTION

1.1. **Tropical curves and holomorphic curves.** The relation between tropical curves and holomorphic curves was found by G. Mikhalkin [3]. A little more precisely, he gave the precise relationship between the following objects.

- Tropical curves in \mathbb{R}^2 .
- Holomorphic curves in toric surfaces.

The rough idea is that we regard a tropical curve Γ as a *dual intersection graph* of a singular holomorphic curve C :

- A vertex of $\Gamma \Leftrightarrow$ An irreducible component of C .
- A bounded edge of $\Gamma \Leftrightarrow$ An intersection between irreducible components.
- An unbounded edge of $\Gamma \Leftrightarrow$ A marked point of C .

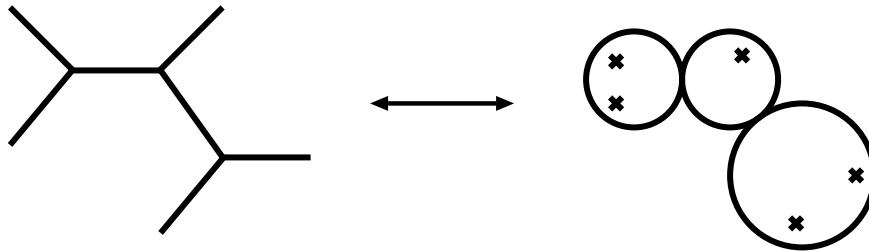


FIGURE 1

In fact, Mikhalkin did not deal with these singular curves, but studied nearly singular curves by an analytic technique of patchworking. However, using toric degeneration and logarithmic deformation theory, it is possible to deal directly with these singular curves. These were introduced to the study of tropical curves in [6], where the correspondence between the following objects was shown:

- Tropical curves of genus zero in \mathbb{R}^n .
- Rational holomorphic curves in toric varieties.

email : nishinou@math.tohoku.ac.jp.

It was necessary to introduce new techniques when the ambient space had higher dimension, because the technique of patchworking was suited only to the study of hypersurfaces. Moreover, a merit of this method is that there is always a precise correspondence between tropical curves and singular curves, which is not always the case when we consider the smooth holomorphic curves, as we explain next.

1.2. Superabundant tropical curves. What about higher genus curves in higher dimensional ambient spaces? As mentioned above, there is a singular holomorphic curve corresponding to a given tropical curve, even in this case. The main difference is the existence of the obstruction to the smoothing of singular curves. Such obstructions appear when one considers *superabundant* tropical curves. By definition, superabundant tropical curves are those which have larger dimensional deformation than expected.

	Dimension of the moduli	Obstruction to smoothing
Non-superabundant	Expected	Not exist
Superabundant	Larger than expected	Possibly exist

Such superabundant tropical curves are the main object of this talk (based on [5]). The key points are the following.

- (1) One can describe the dual space of obstruction combinatorially.
- (2) One can calculate the Kuranishi map.

Using these calculations, one can study various aspects of the tropical curves and holomorphic curves. The followings are the examples.

- Correspondence theorems for non-superabundant curves are completely solved (which is the extension of [3, 6]).
- In principle, one can determine whether a given (superabundant) tropical curve has a smooth holomorphic counter part or not.
- Genus one case can be completely answered by simple combinatorial description, including superabundant case. Enumerative problems can also be solved (in other words, the correspondence theorem is proved for genus one curves).
- One can study holomorphic curves in Calabi-Yau manifolds via tropical curves (with the help of Gross-Siebert's toric degeneration of those manifolds [1, 2]).
- One can also study the case where some components of the singular curve are contained in toric divisors. In particular, one can count the number of holomorphic disks (or bordered Riemann surfaces) with Lagrangian torus boundary in non-Fano toric surfaces (cf. [4, 7]).
- One can study bordered Riemann surfaces in toric varieties whose boundary condition is given by Lagrangian multi-section of the moment map.

In this abstract, we mainly explain the combinatorial description of the dual obstruction space, and give several examples. The correspondence theorem is stated in the simplest situation.

2. FORMAL DEFINITIONS

We recall some definitions about tropical curves. Let $\bar{\Gamma}$ be a weighted, connected finite graph. Its sets of vertices and edges are denoted $\bar{\Gamma}^{[0]}$, $\bar{\Gamma}^{[1]}$, and $w_{\bar{\Gamma}} : \bar{\Gamma}^{[1]} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ is the weight function. An edge $E \in \bar{\Gamma}^{[1]}$ has adjacent vertices $\partial E = \{V_1, V_2\}$. Let $\bar{\Gamma}_{\infty}^{[0]} \subset \bar{\Gamma}^{[0]}$ be the set of one-valent vertices. We write $\Gamma = \bar{\Gamma} \setminus \bar{\Gamma}_{\infty}^{[0]}$. Noncompact edges of Γ are called *unbounded edges*. Let $\Gamma_{\infty}^{[1]}$ be the set of unbounded edges. Let $\Gamma^{[0]}, \Gamma^{[1]}, w_{\Gamma}$ be the sets of vertices and edges of Γ and the weight function of Γ (induced from $w_{\bar{\Gamma}}$ in an obvious way), respectively. Let N be a free abelian group of rank $n \geq 2$ and $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Definition 1 ([3, Definition 2.2]). A *parametrized tropical curve* in $N_{\mathbb{R}}$ is a proper map $h : \Gamma \rightarrow N_{\mathbb{R}}$ satisfying the following conditions.

- (i) For every edge, $E \subset \Gamma$ the restriction $h|_E$ is an embedding with the image $h(E)$ contained in an affine line with rational slope, or $h(E)$ is a point.
- (ii) For every vertex $V \in \Gamma^{[0]}$, $h(V) \in N_{\mathbb{Q}}$ and the following *balancing condition* holds. Let $E_1, \dots, E_m \in \Gamma^{[1]}$ be the edges adjacent to V and let $u_i \in N$ be the primitive integral vector emanating from $h(V)$ in the direction of $h(E_i)$. Then

$$(1) \quad \sum_{j=1}^m w(E_j)u_j = 0.$$

An isomorphism of parametrized tropical curves $h : \Gamma \rightarrow N_{\mathbb{R}}$ and $h' : \Gamma' \rightarrow N_{\mathbb{R}}$ is a homeomorphism $\Phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ respecting the weights such that $h = h' \circ \Phi$.

Definition 2. A *tropical curve* is an isomorphism class of parametrized tropical curves. A tropical curve is *trivalent* if Γ is a trivalent graph. The *genus* of a tropical curve is the first Betti number of Γ . The set of *flags* of Γ is

$$F\Gamma = \{(V, E) \mid V \in \partial E\}.$$

A tropical curve has an *expected dimension* given by

$$e + (n - 3)(1 - g),$$

where e is the number of unbounded edges, g is the genus, n is the dimension of the ambient space. This is calculated by linear algebra.

Definition 3 ([3, Definition 2.22]). A trivalent tropical curve is called *superabundant* if the moduli space is of dimension larger than $e + (n - 3)(1 - g)$.

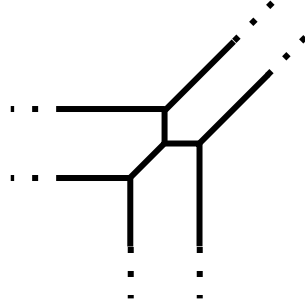


FIGURE 2. An example of a trivalent plane tropical curve of genus zero (all the edges have weight one). This corresponds to a rational plane curve of degree two.

Lemma 4. *If a tropical curve satisfies one of the following conditions, then it is not superabundant.*

- *The ambient space is \mathbb{R}^2 .*
- *The genus is zero.*

□

3. SUPERABUNDANT TROPICAL CURVES: EXAMPLES

By Lemma 4, to obtain a superabundant tropical curve, one has to consider the following situation.

- (1) The dimension of the ambient space is at least three.
- (2) The genus of the curve is at least one.

In fact, in higher dimensional ambient space, there are plenty of superabundant tropical curves. A simple example in \mathbb{R}^3 is given by the following figure.

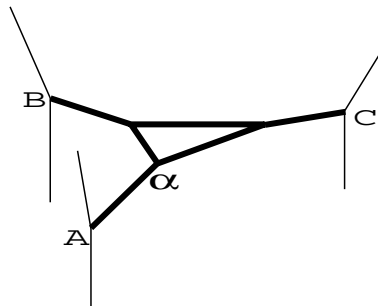


FIGURE 3. The part drawn by bold lines is contained in a plane

Since $n = 3$, the expected dimension is the same as the number of the unbounded edges, which is six. While, the actual freedom to deform the curve is given as follows.

- Three dimensional freedom to move the vertex α .

- One dimensional freedom to move each of the vertices A , B and C . So three dimensional freedom in total.
- One dimensional freedom to scale the triangle.

Thus, the total freedom to deform the curve is seven. So this curve is superabundant.

Next we give an even simpler example.

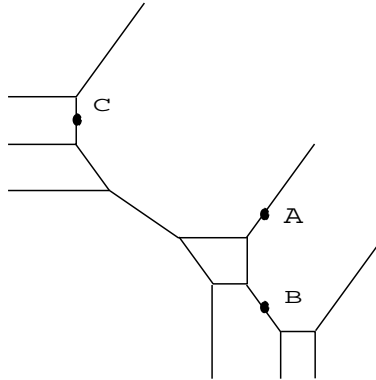


FIGURE 4. An even simpler example

There are three unbounded edges for each of the following directions

$$(-1, 0, 0), (0, -1, 0), (1, 1, 1), (0, 0, -1).$$

All of these edges are weight one. The three black dots in the figure means the unbounded edges of direction $(0, 0, -1)$. This corresponds to a genus one space cubic curve, which has twelve dimensional parameters (this is also calculated by the above formula for the expected dimension: since $n = 3$, it is the same as the number of unbounded edges). While, one can calculate the actual freedom to deform this tropical curve by the same way shown above, and the result is thirteen. *As a result, most of these tropical curves do not have holomorphic counter parts.*

It follows that the necessary (and almost sufficient, except some degenerate cases) condition for the curve to have a holomorphic counter part is, it is contained in a *tropical hypersurface*. This corresponds to the fact that genus one space cubic curve is contained in a hyperplane.

The last example is a genus two superabundant tropical curve Γ .

The curve Γ has twelve unbounded edges:

- Three edges of directions $(0, 0, 1)$ and $(0, 0, -1)$ for each.
- Two edges of directions $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, -1, 0)$ for each.

The bounded edges are:

- Three parallel vertical edges of direction $(0, 0, 1)$.
- Three pairs of parallel edges of directions

$$(1, 0, 0), (-1, -1, 0), (0, 1, 0),$$

respectively.

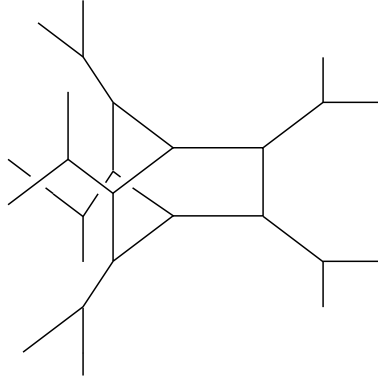


FIGURE 5

- Edges of directions

$$(-1, -1, 1), (-1, -1, -1), (1, 0, 1),$$

$$(1, 0, -1), (0, 1, 1), (0, 1, -1).$$

As before, the expected dimension is given by the number of unbounded edges, that is, twelve. While one can see that the number of freedom to deform this tropical curve is thirteen. However, contrary to the previous example, *all of these thirteen dimensional tropical curve have holomorphic counter part.*

These facts can be seen from the calculation of the Kuranishi map. In particular, in the case of cubic curve, the Kuranishi map is nontrivial, but in the last example, the Kuranishi map is zero.

4. COMBINATORIAL DESCRIPTION OF THE DUAL OBSTRUCTION SPACE

As the above examples may show, it is not always easy to determine whether a given tropical curve is superabundant or not, although basically it is a problem of linear algebra. In [4], an efficient combinatorial answer to this problem was given, which was deduced via sheaf cohomology theory on the corresponding singular holomorphic curve. This method is also crucial to the calculation of the Kuranishi map.

Although the proof uses algebraic geometry, the answer can be stated purely in elementary language. Let Γ be a trivalent tropical curve.

- Definition 5.**
- (i) An edge $E \in \Gamma^{[1]}$ is said to be a *part of a loop of* Γ if the graph given by $\Gamma \setminus E^\circ$ has lower first Betti number than Γ . Here E° is the interior of E (that is, $E^\circ = E \setminus \partial E$).
 - (ii) The *loops of* Γ is the subgraph of Γ composed by the union of parts of a loop of Γ .
 - (iii) A *bouquet of* Γ is a connected component of the loops of Γ . If the first Betti number of a bouquet is one, it is called a *loop*.

Let Γ (precisely, the pair (Γ, h) , where $h : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$) be a tropical curve. Let $\{L_i\}$ be the set of bouquets. Each L_i is a graph with bivalent and trivalent vertices. Every edge E of L_i determines a one dimensional subspace of $N_{\mathbb{R}}$. Cutting L_i at each trivalent vertex v_j , we obtain a set of piecewise linear segments $\{l_m\}$. Let U_m be the linear subspace of $N_{\mathbb{R}}$ spanned by the direction vectors of the segments of l_m (see the figure below).

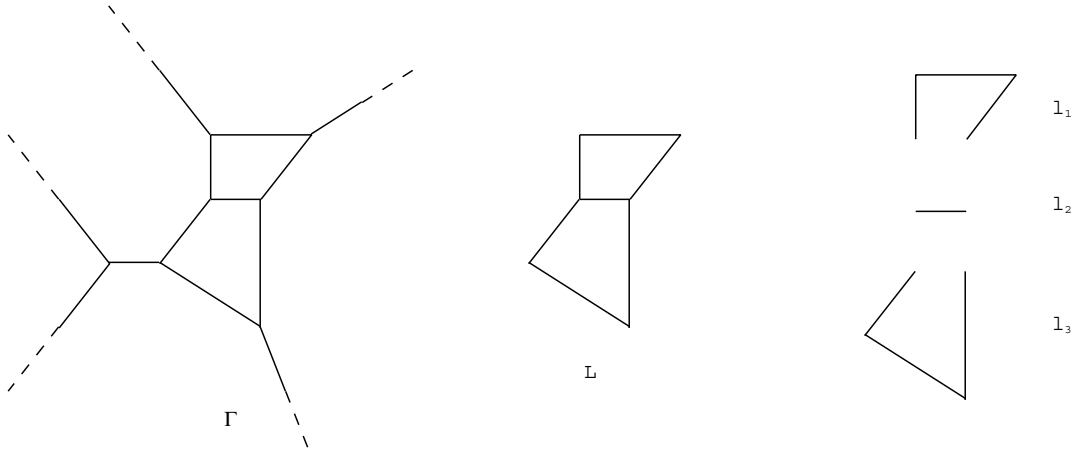


FIGURE 6

Then the criterion of the superabundance of (Γ, h) is given by the following result.

Theorem 6. *Let (Γ, h) be a tropical curve. Then it is superabundant if and only if the vector space H whose elements are determined by the following procedure is not zero.*

- (I) Give the value zero to all the flags (see Definition 2) not contained in L .
- (II) Give a value u_m in $(U_m)^\perp \otimes \mathbb{C} \subset (N_{\mathbb{C}})^\vee$ to each of the flags associated to the edges of l_m .
- (III) The data $\{u_m\}$ give an element of H if and only if the following conditions are satisfied.
 - (a) At each vertex v of Γ ,

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

holds as an element of $(N_{\mathbb{C}})^\vee \otimes \mathbb{C}$. Here u_1, u_2, u_3 are the data attached to the three flags in Γ which have v as the vertex.

- (b) The data $\{u_m\}$ is compatible on each edge of l_m , in the sense that the sum of the values attached to the two flags of an edge of l_m is zero. \square

The following is immediate from this, because when the genus of Γ is one, there is no trivalent vertex in L .

Corollary 7. *When Γ is a tropical curve of genus one, then $H \cong U^\perp \otimes \mathbb{C}$, here U is the linear subspace of $N_{\mathbb{R}}$ spanned by the direction vectors of the segments of the cycle of Γ . \square*

This fact makes the study of genus one case easier than the higher genus cases.

We give an example of the calculation of the space H using the genus two superabundant curve Γ considered in the previous section. The decomposition of the loop part L of Γ is given by the following figure.

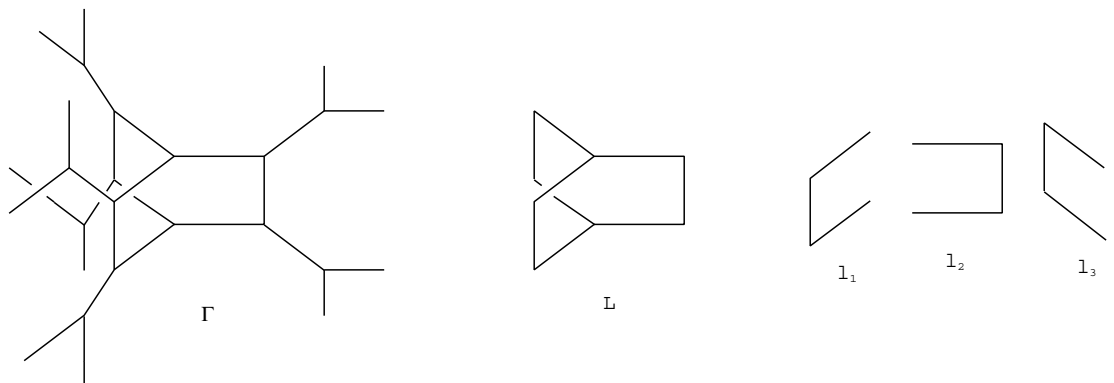


FIGURE 7

We write the linear subspaces of $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^3$ spanned by the edges of l_i by U_{l_1}, U_{l_2} and U_{l_3} . Then, using standard metric on \mathbb{R}^3 to identify it with its dual,

$$(U_{l_1})^\perp \cong \mathbb{R} \cdot (1, 0, 0), \quad (U_{l_2})^\perp \cong \mathbb{R} \cdot (0, 1, 0), \quad (U_{l_3})^\perp \cong \mathbb{R} \cdot (1, 1, 0).$$

Now it is easy to see that the space H for Γ is a one dimensional vector space. Thus, Γ is superabundant.

Remark 8. *In fact, the space H is identified to the dual space of some sheaf cohomology group of a singular curve associated to the tropical curve, which is the obstruction to the smoothing of the curve.*

5. CORRESPONDENCE THEOREM

Theorem 6 is the starting point for the proof of the correspondence theorems for superabundant curves. The main remaining task is to define and calculate the *Kuranishi map* \mathcal{K}_φ . It is a (non-linear) map from the zeroth cohomology group to the first cohomology group of certain sheaf:

$$\mathcal{K}_\varphi : H^0 \rightarrow H^1.$$

Here φ is the singular holomorphic curve associated to the given tropical curve (a little more precisely, φ is a stable map from some prestable

curve to a toric variety. See [6] for the construction of φ from a tropical curve). As we remarked in Remark 8, the space H is the dual of the space H^1 , and the pairing between the image of \mathcal{K} and elements of H can be described in geometric terms. The following is almost an immediate consequence of the definition of \mathcal{K}_φ .

Proposition 9. *The singular curve φ associated to a tropical curve is smoothable if and only if the map \mathcal{K}_φ vanishes.* \square

Since \mathcal{K}_φ can be calculated in geometric terms, the locus where \mathcal{K}_φ vanishes can also be described geometrically. In the simplest case, the condition for the vanishing of \mathcal{K}_φ is the following.

Definition 10. Let (Γ, h) be a genus one tropical curve and assume that h is an embedding and all the edges have weight one. Let L be the loop of Γ . Then (Γ, h) is said to be *well-spaced* if the following condition is satisfied for any affine hyperplane \mathcal{H} of $N_{\mathbb{R}}$ containing $h(L)$. Let

$$\Gamma_{\mathcal{H}} = h(\Gamma) \cap \mathcal{H}$$

be a subgraph of $h(\Gamma)$ cut by \mathcal{H} , and let

$$p_1^{\mathcal{H}}, \dots, p_j^{\mathcal{H}}$$

be the one valent vertices of it. Denote by

$$\mathcal{P}_i, \quad i = 1, \dots, j$$

the unique path connecting $p_i^{\mathcal{H}}$ and L . Let $\ell_{(\Gamma, h)}(\mathcal{P}_i)$ be the integral length of the path \mathcal{P}_i . Then the set

$$\{\ell_{(\Gamma, h)}(\mathcal{P}_1), \dots, \ell_{(\Gamma, h)}(\mathcal{P}_j)\}$$

of positive integers contains at least two minimum.

For example, in the case of the tropical curve in Figure 3, the space \mathcal{H} is unique (the affine plane containing the loop), and $\Gamma_{\mathcal{H}}$ is the part drawn by bold lines. In the case of Figure 4 too, the subspace \mathcal{H} is unique, and one sees that the vertices $p_i^{\mathcal{H}}$ are given by A, B and C .

Using this definition, we can state the correspondence theorem for the simplest case.

Theorem 11. *Let (Γ, h) be a genus one tropical curve and assume that h is an embedding and all the edges have weight one. Then the associated singular holomorphic curve φ allows a smoothing if and only if (Γ, h) is well-spaced. Moreover, locally the moduli space of such a smoothing is naturally identified with the complexification of the moduli space of well-spaced tropical curves.* \square

Remark 12. (1) *This condition was first introduced by Speyer [8] through the considerations of rigid geometry.*

(2) *For the proof of full correspondence theorem, it is important to consider those tropical curves:*

- *Some of the edges have higher weights.*
- *The map h is not an immersion.*

The well-spacedness condition should be modified accordingly.

- (3) *Enumerative problems for genus one curves (i.e., computing Gromov-Witten type invariants) can be solved using this theorem.*

Theorem 11 also has geometric consequences to tropical curves. For example, as we noted in Section 3, the necessary (and almost sufficient) condition for the tropical curve given in Figure 4 to have a holomorphic counter part is that it is contained in some tropical hypersurface. Then, according to Theorem 11, it follows that (except some degenerated cases), a tropical curve given in Figure 4 is contained in a tropical hypersurface if and only if it satisfies the well-spacedness condition (this is an easily verified condition, while it is not very easy to directly judge whether a given tropical curve is contained in some tropical hypersurface or not).

REFERENCES

- [1] GROSS, M. AND SIEBERT, B., *Mirror symmetry via logarithmic degeneration data I*. J. differential geometry. 72 (2006) 169-338.
- [2] GROSS, M. AND SIEBERT, B., *From real affine geometry to complex geometry*. Preprint
- [3] MIKHALKIN, G., *Enumerative tropical algebraic geometry in \mathbb{R}^2* . J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), no. 2, 313–377
- [4] NISHINOU, T., *Disc counting via tropical geometry*. Preprint.
- [5] NISHINOU, T., *Corresponding theorems for tropical curves*. Preprint.
- [6] NISHINOU, T. AND SIEBERT, B., *Toric degenerations of toric varieties and tropical curves*. Duke Math. J. 135 (2006), no. 1, 1–51.
- [7] NISHINOU, T., NOHARA, Y. AND UEDA, K., *Potential functions via toric degenerations*. Preprint.
- [8] SPEYER, D., *Uniformizing Tropical Curves I: Genus Zero and One*. Preprint.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOHOKU UNIVERSITY, SENDAI, MIYAGI, JAPAN

Sobolev Type Inequalities on Complete Riemannian Manifolds

Changyu Xia
 Departamento de Matemática
 Universidade de Brasília, Brasília-DF, Brazil

In this lecture, we will report some results about the structure of complete non-compact Riemannian manifolds which support some Sobolev type inequalities.

Let $n(\geq 2)$ be an integer. Given $q \in (1, n]$, we set $q^* = nq/(n - q)$. Let $K(n; q)$ be the best constant for the Euclidean Sobolev inequality, that is,

$$(1) \quad K(n, q)^{-1} = \inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) - \{0\}} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^q\right)^{1/q}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} u^{q^*}\right)^{1/q^*}}$$

The exact value of $K(n, q)$ has been obtained by Aubin [1] and Talenti [27] independently.

A Riemannian manifold M^n is said to admit an Euclidean-Sobolev inequality if there exists a constant $C_M > 0$ such that, for every $u \in C_0^\infty(M)$,

$$(2) \quad \left(\int_M |u|^{q^*}\right)^{1/q^*} \leq C_M \left(\int_M |\nabla u|^q\right)^{1/q}.$$

The validity of (2) has intriguing and deep connections with the geometry of the underlying manifold (cf. [1], [15], [26]). It has been proved by M. Ledoux [17] that for complete manifolds of non-negative Ricci curvature, the equality $C_M = K(n, q)$ forces M to be isometric to \mathbb{R}^n . This important rigidity theorem has been generalized by Xia [28], by showing that, in case C_M is sufficiently close to $K(n, q)$, then M is diffeomorphic to \mathbb{R}^n .

With the above results in mind, it is natural to obtain similar results for manifolds admitting some kind of Sobolev type inequalities. The first step to this problem is to know what kind of interesting inequalities the Euclidean space support.

Theorem 1 (log-Sobolev inequality, Gross, 1975, [14]). *For any $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, with $\int_{\mathbb{R}^n} f^2 = 1$,*

$$(3) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f^2 \log f^2 \leq \frac{n}{2} \log \left(\frac{2}{n\pi e} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 \right).$$

Theorem 2 (L^p log-Sobolev inequality, Del Pino, Dolbeault, 2002, [11]). *Assume that $p \in (1, n)$. Then for any $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ with $\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p = 1$,*

$$(4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \log |f|^2 \leq \frac{n}{p^2} \log \left(L(n, p) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \right)$$

where the best constant $L(n, p)$ is achieved by the functions

$$u(x) = \pi^{-n/2} \lambda^{-\frac{n(p-1)}{p}} \frac{\Gamma(n/2 + 1)}{\Gamma(n(p-1)/p + 1)} e^{-\frac{1}{\lambda}|x-\bar{x}|^{p/(p-1)}}$$

Theorem 3 (The Nash inequality).

i) (Nash, 1958). For any $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, with $\int_{\mathbb{R}^n} f^2 = 1$,

$$(5) \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \right)^{(n+2)/n} \leq H(n) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f| \right)^{4/n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 \right).$$

ii) (Carlen-Loss, 1999, [6]). The best constant $H(n)$ in the above inequality is given by

$$(6) \quad H(n) = \frac{2((n+2)/2)^{(n+2)/n}}{n\Omega_n^{2/n}\lambda_1(B^n)},$$

where Ω_n and $\lambda_1(B^n)$ denote the volume of the unit ball \mathbf{B}^n in \mathbb{R}^n and the first non-zero Neumann eigenvalue of the Laplacian of \mathbf{B}^n .

Theorem 4 (The Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities).

i) (Caffarelli-Kohn-Nirenberg, 1984, [5]). Let $n \geq 3$ and let a, b and p be such that

$$(7) \quad 0 \leq a < (n-2)/2, \quad a \leq b \leq a+1, \quad p = \frac{2n}{n-2+2(b-a)}.$$

Then, for any $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$(8) \quad \| |x|^{-b} u \|_p \leq K_{a,b} \| |x|^{-a} |\nabla u| \|_2.$$

ii) (Lieb, 1983, for $a=0, 0 < b < 1$, [22], Chou-Chu, 1993 for $a \geq 0, a \leq b \leq a+1$, [8]). The best $K_{a,b}$ in (8) is achieved by

$$u(x) = (\lambda + |x|^{2-bp})^{-(n-2)/(2-bp)}, \quad \lambda > 0.$$

Theorem 5 (The Gagliardo-Nirenberg inequality).

i) (Gagliardo, 1958, Nirenberg, 1959). Let $n \geq 2$. If $p > 1$, and $p \leq n/(n-2)$ for $n \geq 3$, then for any $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ the following inequality holds

$$(9) \quad \|u\|_{2p} \leq G(n, p) \|\nabla u\|_2^\theta \|u\|_{p+1}^{1-\theta},$$

where $\theta = n(p-1)/p(n+2-(n-2)p)$.

ii) (Del Pino, Dolbeault, 2002, [10]). The best constant $G(n, p)$ in (9) is achieved by the functions

$$(10) \quad u_{\lambda, \bar{x}}(x) = (\lambda + |x - \bar{x}|^2)^{-1/(p-1)},$$

with $\lambda > 0$, and $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Theorem 6 (Another sharp Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality).

i) (Caffarelli-Kohn-Nirenberg, 1984, [5]). Let $n \geq 2$, $r > p > 1$, a, b, p and $c = (a-1)/r + (p-1)b/\{pr\}$ be constants satisfying

$$(11) \quad 1/p + a/n, \quad (p-1)/p(r-1) + b/n, \quad 1/r + c/n > 0,$$

Then, for any $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$(12) \quad \| |x|^c u \|_r^r \leq C \| |x|^a |\nabla u| \|_p \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^b |u|^{p(r-1)/(p-1)} \right)^{(p-1)/p}$$

ii) (Xia, 2007, [30]). The best constant $C(n, a, b, p)$ in (12) is achieved by the functions

$$u(x) = (\lambda + |x|^{1-a+b/p})^{(1-p)/(r-p)}, \quad \lambda > 0.$$

Theorem 7 (Affine Sobolev inequality, Lutward-Yang-Zhang, 2002, [23]). Suppose p is given by $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. If $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, then

$$(13) \quad \left(\int_{S^{n-1}(1)} \|v\|_{f,p}^{-n} \right)^{-1/n} \geq C(n) \|f\|_q.$$

Where the best constant $C(n)$ in the above inequality is attained by the functions

$$f(x) = \left(a + |A(x - x_0)|^{p/(p-1)} \right)^{1-\frac{n}{p}},$$

with $A \in \mathbf{GL}(n)$, $a > 0$ and $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Theorem 8 (The Hardy inequality, [24]). Let $n \geq 3$ be an integer and let p, q, β and γ be constants satisfying

$$(14) \quad 1 \leq q < n, \quad q \leq p \leq \frac{nq}{n-q}, \quad \gamma = -1 + n \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right).$$

There exists a positive constant C such that

$$(15) \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma p} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

Let $K(n, q, \gamma)$ be the best constant for this inequality. When $\gamma p + q > 0$ and $q > 1$, the following functions

$$u(x) = \left(\lambda + |x|^{(q+\gamma p)/(q-1)} \right)^{(q-n)/(q+\gamma p)}, \quad \lambda > 0,$$

is a family of minimizers for $K(n, q, \gamma)$.

Theorem 9 (The generalized Hardy inequality, Horiuchi, 1997, [16]). Let $n \geq 2$ be an integer and let p, q, α and γ be constants satisfying

$$(16) \quad 1 < q < p < +\infty, \quad n \geq 2, \quad (1 - \alpha + \gamma)q < n, \quad \gamma = \alpha - 1 + n \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right), \quad -\frac{n}{p} < \gamma \leq \alpha \leq 0.$$

There exists a positive constant C such that

$$(17) \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma p} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha q} |\nabla u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

If we denote by $W(n, q, \gamma)$ the best constant for this inequality, then $W(n, q, \gamma)$ is achieved by the radially symmetric functions

$$u(x) = \left(\lambda + |x|^{\frac{(p-q)(n-q+\alpha q)}{q(q-1)}} \right)^{-q/(p-q)}, \quad \lambda > 0.$$

Interesting results on complete non-compact Riemannian manifolds which support some of the above Sobolev type inequalities have been proved during the past years. It is known that on a complete manifold, the Sobolev inequalities

$$(18) \quad \|u\|_{2n/(n-2)} \leq C \int_M |\nabla u|^2, \quad u \in C_0^\infty(M),$$

the log-Sobolev inequalities

$$(19) \quad \int_M u^2 \log u^2 \leq \frac{n}{2} \log \left(C \int_M |\nabla u|^2 \right), \quad u \in C_0^\infty(M)$$

and the Nash's inequalities

$$(20) \quad \left(\int_M u^2 \right)^{(n+2)/n} \leq C \left(\int_M |u| \right)^{4/n} \left(\int_M |\nabla u|^2 \right).$$

are all equivalent to a common upper bound on the heat kernel $p_t(x, y)$ on M given by

$$\sup_{x, y \in M} p_t(x, y) \leq \frac{C'}{t^{n/2}}, \quad t > 0.$$

In particular, these inequalities are equivalent, for possibly different $C > 0$ (cf. [2, 3, 4, 9]).

The Sobolev inequality (18) holds on a complete minimal submanifold in \mathbb{R}^m and on a Hadamard manifold and so the inequalities (19) and (20) also hold on them.

Theorem 10.

i) (Druet-Hebey-Vaugon, 1999, [12]) *Let M be an n -dimensional complete manifold with $\text{Ric}_M \geq 0$ on which the Nash's inequality*

$$\left(\int_M u^2 \right)^{(n+2)/n} \leq C \left(\int_M |u| \right)^{4/n} \left(\int_M |\nabla u|^2 \right), \quad u \in C_0^\infty(M),$$

are satisfied. Then M is flat.

ii) (Xia, 2007, [30]) *The above M is isometric to \mathbb{R}^n .*

Theorem 11. (do Carmo-Xia, 2004, [13]). *For $n \geq 3$, let a, b be constants satisfying $0 \leq a < (n-2)/2$, $a \leq b < a+1$ and set $p = \frac{2n}{n-2+2(b-a)}$. Let C be a constant and M be an n -dimensional complete open Riemannian manifold with $\text{Ric}_M \geq 0$. Fix a point $x_0 \in M$ and denote by ρ the distance function from x_0 . Assume that, for any $u \in C_0^\infty(M)$,*

$$(21) \quad \|\rho^{-b}u\|_p \leq C \|\rho^{-a}|\nabla u|\|_2.$$

Then for any $x \in M$, we have

$$(22) \quad |B_r(x)| \geq (C^{-1}K_{a,b})^{n/(1+a-b)} V_0(r), \quad \forall r > 0,$$

where $|B_r(x)|$ denotes the volume of the geodesic ball $B_r(x)$.

A theorem due to Li-Anderson [21] states that if M^n is complete with $\text{Ric}_M \geq 0$ and $\alpha_M =: \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|B(p,r)|}{V_0(r)} > 0$, then $\pi_1(M)$ is finite and the order of $\pi_1(M)$ is $\leq \frac{1}{\alpha_M}$. Moreover, by Cheeger-Colding's theorem [7], if α_M is close to 1, then M is diffeomorphic to \mathbb{R}^n . Combining these results with theorem 11, we get

Corollary 1. *Let the conditions be as in Theorem 11.*

- i) *M has finite fundamental group and the order of $\pi_1(M)$ is bounded above by $(K_{a,b}C^{-1})^{n/(1+a-b)}$;*
- ii) *If in addition that $C = K_{a,b}$, then $M = \mathbb{R}^n$;*
- iii) *There exists an $\epsilon(n, a, b) > 0$, such that if $C \leq \epsilon + K_{a,b}$, then M is diffeomorphic to \mathbb{R}^n .*

Theorem 12 (Xia, 2005, [29]). *Let $\text{Ric}_{M^n} \geq 0$. Let $p > 1$, and $p \leq n/(n-2)$ for $n \geq 3$. If for any $u \in C_0^\infty(M^n)$ the following Gagliardo-Nirenberg inequality holds*

$$(23) \quad \|u\|_{2p} \leq C \|\nabla u\|_2^\theta \|u\|_{p+1}^{1-\theta},$$

where $\theta = n(p-1)/p(n+2-(n-2)p)$. Then $\forall x \in M$,

$$(24) \quad |B(x, r)| \geq (C^{-1}G(n, p))^{\left(\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q} - \frac{1}{r}\right)^{-1}} V_0(r), \quad \forall r > 0.$$

In particular, if C is close to $G(n, p)$, then M is diffeomorphic to \mathbb{R}^n .

Theorem 13 (Xia, 2007, [30]). *Let $\text{Ric}_{M^n} \geq 0$ and let $n \geq 2$, $r > p > 1$, a, b, p and $c = (a-1)/r + (p-1)b/\{pr\}$ be such that*

$$(25) \quad 1/p + a/n, (p-1)/p(r-1) + b/n, 1/r + c/n > 0,$$

If, for any $u \in C_0^\infty(M)$,

$$(26) \quad \|\rho^c u\|_r^r \leq C(n, a, b, p) \|\rho^a |\nabla u|\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho^b |u|^{p(r-1)/(p-1)} \right)^{(p-1)/p},$$

where $C(n, a, b, p)$ is the best constant for this inequality on \mathbb{R}^n , then $M = \mathbb{R}^n$.

Definition 1. A complete manifold M^n is said to have polynomial volume growth of degree at most $n_0 > 0$, if there exists a positive constant η such that

$$\text{Vol}[B_R(p)] \leq \eta R^{n_0}, \quad \forall R \geq 1.$$

Doubling Volume Property. We say that M^n satisfies *doubling volume property* at $x \in M$ if there exists a constant $\alpha > 0$ such that

$$(27) \quad \text{Vol}[B_{2R}(x)] \leq \alpha \text{Vol}[B_R(x)], \quad \forall R > 0.$$

It is not hard to see that the constant α in the above inequality is no less than 2^n . Observe that the doubling volume property implies that

$$(28) \quad \text{Vol}[B_R(p)] \leq \alpha \text{Vol}[B_1(p)] \cdot R^{\log_2 \alpha}, \quad \forall R \geq 1$$

and so M^n has polynomial volume growth of degree at most $\log_2 \alpha$.

Let M^n be complete with

$$(29) \quad \text{Ric}_M(x) \geq -(n-1)G(\rho(x)),$$

where $G \in C^1([0, +\infty))$ with $\int_0^\infty tG(t)dt = b_0 < +\infty$ and ρ is the distance function from some point p of M . Then, M is said to have asymptotically non-negative Ricci curvature and in this case we have for $0 < r_1 < r_2$,

$$(30) \quad \frac{|B_{r_2}(p)|}{|B_{r_1}(p)|} \leq e^{(n-1)b_0} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^n$$

which implies easily that M^n has *doubling volume property* at p and [25]

$$(31) \quad \text{Vol}[B_R(p)] \leq e^{(n-1)b_0} \omega_n R^n, \quad \forall R > 0.$$

Thus M^n has polynomial volume growth of degree at most n .

Theorem 14 (Levi-Xia, 2010, [20]). *Let $n \geq 3$ be an integer and let p, q, γ be constants satisfying*

$$(32) \quad 1 < q < n, \quad q < p \leq \frac{nq}{n-q}, \quad \gamma = -1 + n \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right).$$

Let (M^n, g) a complete non-compact Riemannian manifold with Ricci curvature satisfying (29) and suppose that

$$(33) \quad \left(\int_M \rho^{\gamma p} |u|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_M |\nabla u|^q dv_g \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(M),$$

for some constant $C \geq K(n, q, \gamma)$. Then, for any $R > 0$, we have

$$(34) \quad \text{Vol}[B_R(o)] \geq e^{-(n-1)b_0} (C^{-1} K(n, q, \gamma))^{pq/(p-q)} V_0(R),$$

where $V_0(R)$ denotes the volume of an R -ball in \mathbb{R}^n .

Theorem 15 (Levi-Xia, 2010, [19]). *Given $1 \leq q < n$, $0 < \theta \leq 1$, $s > 1$, define the number r by*

$$(35) \quad \frac{1}{s} - \frac{1}{r} = \theta \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{q^*} \right),$$

where $q^ = \frac{nq}{n-q}$. Let M^n be a complete non-compact Riemannian manifold. Suppose that there exists a constant $A \in \mathbb{R}$ such that for all $u \in C_0^\infty(M)$,*

$$\left(\int_M |u|^r dv \right)^{\frac{1}{r}} \leq A \left(\int_M |\nabla u|^q dv \right)^{\frac{\theta}{q}} \left(\int_M |u|^s dv \right)^{\frac{1-\theta}{s}}.$$

Then $A \geq G(n, p)$.

Theorem 15 (Levi-Xia, 2010, [19]). *Given $1 \leq q < n$, $0 < \theta \leq 1$, $s > 1$, define the number r by (35). Let M^n be a complete non-compact Riemannian manifold satisfying the doubling volume property. Suppose that there exists a constant $c > 0$ such that for all $u \in C_0^\infty(M)$*

$$(36) \quad \left(\int_M |u|^r dv \right)^{\frac{1}{r}} \leq c \left(\int_M |\nabla u|^q dv \right)^{\frac{\theta}{q}} \left(\int_M |u|^s dv \right)^{\frac{1-\theta}{s}}.$$

Then, we have

$$(37) \quad \text{Vol}[B_R(p)] \geq [c(\alpha^{\frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{s}})]^{-\frac{n}{\theta}} R^n, \quad \forall R > 0.$$

Theorem 16 (Levi-Xia, 2010, [18]). *Let M^n be a complete Riemannian manifold on which some generalized Hardy inequality is satisfied, that is, $\forall u \in C_0^\infty(M)$,*

$$(38) \quad \left(\int_M \rho^{\gamma p} |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_M \rho^{\alpha q} |\nabla u|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

for some constant $C > 0$, where the constants p, q, α, γ are given by (16). Then $C \geq W(n, q, \gamma)$.

Theorem 17 (Levi-Xia, 2010, [18]). *Let $n \geq 2$ be an integer and let p, q, γ, α be constants satisfying (16) and let M^n be a complete non-compact Riemannian manifold with Ricci curvature satisfying (29) and suppose that*

$$(39) \quad \left(\int_M \rho^{\gamma p} |u|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_M \rho^{\alpha q} |\nabla u|^q dv_g \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(M),$$

for some constant $C > 0$. Then, for any $R > 0$, we have

$$(40) \quad \text{Vol}[B_R(o)] \geq e^{-(n-1)b_0} (C^{-1}W(n, q, \gamma))^{\frac{pq}{p-q}} V_0(R).$$

Most of the Sobolev type inequalities above have strong restrictions on the geometry of the manifolds. But we still do not have interesting results for manifolds which support the L_p ($p \neq 2$) log-Sobolev inequality (4). It is interesting to prove a similar result for this inequality and the affine Sobolev inequality (13).

References

- [1] T. Aubin, *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*, Springer, Berlin, 1998.
- [2] D. Bakry, L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes. *Lecture Notes in Math.*, **1581** Springer, Berlin (1994) 1–114.
- [3] D. Bakry, D. Concordet, M. Ledoux, Optimal heat kernel bounds under logarithmic Sobolev inequalities. *ESAIM: Prob. and Stat.* **1** (1997), 391–407.
- [4] D. Bakry, T. Coulhon and M. Ledoux, Sobolev inequalities in disguise. *Indiana J. Math.*, **44** (1995) 1034–1074.
- [5] L. A. Caffarelli, R. Kohn and L. Nirenberg, First order interpolation inequalities with weights, *Compositio Math.* **53** (1984), 259–275.
- [6] E. Carlen and M. Loss, Sharp constant in Nash's inequality, *Duke Math. J., International Math. Research Notices* **7**, 213–215.
- [7] J. Cheeger, T. Colding, On the structure of spaces with Ricci curvature bounded from below I. *J. Diff. Geom.* **46** (1997), 406–480.
- [8] K. S. Chou, C. W. Chu, On the best constants for a weighted Sobolev-Hardy inequality. *J. London Math. Soc.* **48** (1993), 137–151.
- [9] E. B. Davies, *Heat kernels and spectral theory*. Cambridge University Press, (1989).
- [10] M. Del Pino and J. Dolbeault, Best constants for Gagliardo-Nirenberg inequalities and applications to nonlinear diffusions, *J. Math. Pures Appl.* **81**(2002), 847–895.
- [11] M. Del Pino and J. Dolbeault, The optimal Euclidean L^p -Sobolev logarithmic inequality, *J. Funct. Anal.* **174**(2003), 151–161.
- [12] O. Druet, E. Hebey and M. Vaugon, Optimal Nash's inequalities on Riemannian manifolds: the influence of geometry, *Internat. Math. Res. Notices.* **14**(1999), 735–779.

- [13] M. Do Carmo, C. Xia, Complete manifolds with non-negative Ricci curvature and the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities. *Compositio Math.* **140** (2004) 818–826.
- [14] L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities. *Amer. J. Math.*, **97** (1975) 1061-1083.
- [15] E. Hebey, Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities. *Courant Lecture Notes in Mathematics*, vol. 5, (1999).
- [16] T. Horiuchi, Best Constant in Weighted Sobolev Inequality with Weights Being Powers of Distance from the Origin. *J. of Inequal. & Appl.* **1** (1997) 275–292.
- [17] M. Ledoux, On manifolds with non-negative Ricci curvature and Sobolev inequalities. *Comm. Anal. Geom.* **7** (1999) 347-353.
- [18] L. Adriano, C. Xia, On weighted Sobolev type inequalities on Riemannian manifolds, preprint, 2010.
- [19] L. Adriano, C. Xia, Sobolev type inequalities on Riemannian manifolds, *J. Math. Anal. and Appl.* **371** (2010) 372-383.
- [20] L. Adriano, C. Xia, Hardy type inequalities on complete Riemannian manifolds, *Monatsh. Math.* In press (2010).
- [21] P. Li, Large time behavior of the heat equation on complete manifolds with non-negative Ricci curvature. *Ann. Math.* **124** (1986), 1–21.
- [22] E.H. Lieb, Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities, *Annals of Math.* **118** (1983), 349-374.
- [23] E. Lutwak, D. Yang and G. Zhang, Sharp affine L_p Sobolev inequalities, *J. Differential Geom.* **62** (2002), 17-38.
- [24] V. G. Maz'ja, Sobolev Spaces, Springer, Berlin, (1995).
- [25] S. Pigola, M. Rigoli, A. G. Setti, Vanishing and Finiteness Results in Geometric Analysis. *Progress in Mathematics* **266** Birkhauser (2008).
- [26] R. Schoen, S. T. Yau, Lecture on Differential Geometry. International Press, Cambridge, MA, 1994.
- [27] G. Talenti, Best constant in Sobolev inequality. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* **110** (1976) 353–372.
- [28] C. Xia, Complete manifolds with non-negative Ricci curvature and almost best Sobolev constant. *Illinois J. Math.* **45** (2001) 1253–1259.
- [29] C. Xia, The Gagliardo-Nirenberg inequalities and manifolds of non-negative Ricci curvature. *J. Funct. Anal.* **224** (2005) 230–241.
- [30] C. Xia, The Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities on complete manifolds. *Math. Res. Lett.* **14** (2007), n.o 5, 875–885.

レンズ空間のインスタントン Floer ホモロジー

笹平 裕史 (名古屋大学)

1 はじめに

今回の講演は次の2つのことに関することである。

- インスタントン Floer ホモロジーのレンズ空間への拡張
- Donaldson 理論と Seiberg-Witten 理論の関係

インスタントン Floer ホモロジーは、Floer[4] によって導入されたホモロジー 3 球面の不変量である。4次元多様体 X が適当な条件をみたすとき、 X 上のインスタントンのモジュライ空間を用いて Donaldson 不変量と呼ばれる不変量が定義される。4次元多様体 X がホモロジー 3 球面 Y によって2つに分解されるとき、 X の Donaldson 不変量の計算において、 Y のインスタントン Floer ホモロジーは重要な役割を果たす。インスタントン Floer ホモロジーをホモロジー 3 球面以外の 3次元多様体へ拡張したいと考えるのは自然なことである。いくつかの試みがあるが完全には解決されていない。今回はレンズ空間への拡張をお話する。

話をしたいもうひとつのことは、Donaldson 理論と Seiberg-Witten 理論の関係についてである。モノポールのモジュライ空間を用いて Seiberg-Witten 不変量とよばれる 4次元多様体の不変量が定義される。Witten によって、Donaldson 不変量と Seiberg-Witten 不変量はある公式 (Witten の公式) で結ばれる等価な不変量であると予想されている。この予想は多くの場合に正しいことが示されている。一方、Donaldson 不変量と Seiberg-Witten 不変量には、いくつかの精密化や変種がある。これらについても同様に等価性が成り立っているのかどうか、つまり Witten の予想の精密化が成り立っているのかを考えたい。今回の講演では、Witten の予想の精密化が成立していないことを示唆する具体的な例をお見せする。この具体例はレンズ空間のインスタントン Floer ホモロジーを計算することで与えられる。

2 Donaldson 不変量とその変種

2.1 インスタントン

Donaldson 不変量は 4次元多様体上のインスタントンのモジュライ空間を用いて定義される。まず、インスタントンとは何かを説明する。

X を向きのついた 4 次元多様体で、Riemann 計量 g を選ぶ。 P を X 上の $SO(3)$ 主束とする。インスタントとは P の接続で次のように定められる方程式を満たすものである。 $\mathfrak{g}_P = P \times_{\text{ad}} \mathfrak{g}$ を P の随伴束とする。 (\mathfrak{g} は $SO(3)$ の Lie 環である。) g を用いて、Hodge $*$ 作用素

$$* : \Omega_X^2(\mathfrak{g}_P) \longrightarrow \Omega_X^2(\mathfrak{g}_P)$$

を得る。 $*^2 = 1$ となることから、固有値は ± 1 になる。よって分解

$$\Omega_X^2(\mathfrak{g}_P) = \Omega_X^+(\mathfrak{g}_P) \oplus \Omega_X^-(\mathfrak{g}_P)$$

を得る。 $\Omega_X^+(\mathfrak{g}_P)$ は固有値 1 の固有空間で $\Omega_X^-(\mathfrak{g}_P)$ は固有値 -1 の固有空間である。

P の接続 A にたいして、曲率 $F_A \in \Omega_X^2(\mathfrak{g}_P)$ が定まる。上の分解に応じて $F_A = F_A^+ + F_A^-$ と書ける。 A が次の方程式を満たすときインスタントと呼ばれる。

$$F_A^+ = 0.$$

\mathcal{G}_P を P のゲージ群とする。つまり、 X の恒等写像をカバーする P の束写像全体の群とする。 \mathcal{G} は P の接続の空間 \mathcal{A}_P に引き戻しによって作用する。この作用はインスタント方程式の解空間を保つ。

$$M_P = M_P(g) = \{A \in \mathcal{A}_P | F_A^+ = 0\} / \mathcal{G}_P$$

をインスタントのモジュライ空間と呼ぶ。

2.2 不変量

4 次元閉多様体 X の不変量が、モジュライ空間上でコホモロジー類を積分することで定義される。直積 $X \times M_P$ の上に普遍束と呼ばれる主 $SO(3)$ 束 \mathbb{P} が定義できる。モジュライ空間のコホモロジー類がつぎの写像によって得られる。

$$\begin{aligned} \mu : H_2(X; \mathbb{Z}) &\longrightarrow H^2(M_P; \mathbb{Q}) \\ [\Sigma] &\longmapsto -\frac{1}{4}p_1(\mathbb{P})/[\Sigma] \end{aligned}$$

Σ はホモロジー類を代表する X 中の向きのついた閉曲面である。 $\langle w_2(P), [\Sigma] \rangle \equiv 0 \pmod{2}$ のときは、より幾何学的に $\mu([\Sigma])$ を定義できる。この場合、 M_P 上に Σ の twisted $\bar{\partial}$ 作用素の行列式束 $\mathcal{L}_\Sigma \rightarrow M_P$ が定義でき、

$$c_1(\mathcal{L}_\Sigma) = \mu([\Sigma])$$

となる。

X を単連結な向きのついた 4 次元閉多様体で、 $b^+(X)$ は 1 より大きい奇数であるとする。 $b^+(X)$ は交叉形式 $Q_X : H_2(X; \mathbb{Z}) \otimes H_2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ の正の固有値の数である。 $w \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$ を固定し、 $w_2(P) = w$ となる $SO(3)$ 主束 P を考える。このとき、("ほとんど全ての" g にたいして) $M_P(g)$ は偶数次元の滑らかな多様体 (または空集合) になる。 $\dim M_P = 2d$ であるとする。このとき、 $[\Sigma_1], \dots, [\Sigma_d] \in H_2(X; \mathbb{Z})$ にたいして、

$$\Psi_{X,w}([\Sigma_1], \dots, [\Sigma_d]) = \int_{M_P(g)} \mu([\Sigma_1]) \cup \dots \cup \mu([\Sigma_d])$$

と定義する。 $(M_P$ は一般にはコンパクトではないが、ある方法でこの積分を正当化できる。) これにより、関数

$$\Psi_{X,w} : \otimes H_2(X; \mathbb{Z}) = \oplus_{d \geq 0} H_2(X; \mathbb{Z})^{\otimes d} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

を得る。 $M_P(g)$ は Riemann 計量 g に依存するが、 $\Psi_{X,w}$ は g によらず、 X の微分同相不変量になる。これを Donaldson 不変量と呼ぶ。

\mathbb{Z}_2 係数のコホモロジー類を用いた変種もある。いま、 $w_2(P) = w_2(X)$ かつ $p_1(P) \equiv \sigma(X) \pmod{8}$ であるとする。 $\sigma(X)$ は X の符号数である。このとき、 X 上の twisted spin-c Dirac 作用素を用いて、実直線束

$$\Lambda \xrightarrow{\mathbb{R}} M_P$$

を構成できる。 $u_1 := w_1(\Lambda) \in H^1(M_P; \mathbb{Z}_2)$ とおく。

$b^+(X)$ が 1 より大きい偶数であるとする。このとき、 M_P は奇数次元になる。 $\dim M_P = 2d + 1$ であるとする。 $[\Sigma_1], \dots, [\Sigma_d] \in H_2(X; \mathbb{Z})$, $[\Sigma_i] \cdot [\Sigma_i] \equiv 0 \pmod{2}$ をとる。(このとき、 $\mu([\Sigma_i])$ は twisted $\bar{\partial}$ 作用素の行列式の第一 Chern 類として、 \mathbb{Z} 上で定義できる。)

$$\Psi_X^{u_1}([\Sigma_1], \dots, [\Sigma_d]) = \int_{M_P} u_1 \cup \mu([\Sigma_1]) \cup \dots \cup \mu([\Sigma_d])$$

と定義する。これによって、関数

$$\Psi_X^{u_1} : A(X) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

を得る。 $A(X)$ は $\{ [\Sigma_1] \otimes \dots \otimes [\Sigma_d] \mid [\Sigma_i] \cdot [\Sigma_i] \equiv 0 \pmod{2} \}$ で生成される $\otimes H_2(X; \mathbb{Z})$ の部分空間である。 $\Psi_X^{u_1}$ は Riemann 計量 g に依存しない X の微分同相不変量になる。

3 Floer ホモロジーと張り合わせ公式

3.1 ホモロジー 3 球面のインスタントン Floer ホモロジー

はじめに述べたように、Donaldson 不変量を計算するときインスタントン Floer ホモロジーが有効になる。Floer ホモロジーの構成について簡単

に説明する。 Y を向きをついたホモロジー 3 球面とする。 $P = Y \times SO(3)$ を Y 上の自明な $SO(3)$ 束とする。 $R(Y)$ を P 上の平坦接続のゲージ同値類全体の集合とする。このとき、"Floer 次数"

$$\delta_Y : R(Y) \longrightarrow \mathbb{Z}_8$$

が定義される。これは、 $Y \times \mathbb{R}$ 上のある微分作用素の指数として定義される。 $i \in \mathbb{Z}$ にたいして、 $CF_i(Y; \mathbb{Q})$ を

$$\{[\rho] \in R(Y) \mid \delta_Y([\rho]) \equiv i \pmod{8}, \rho \text{ は自明な接続とゲージ同値でない。}\}$$

で張られる \mathbb{Q} 上のベクトル空間とする。境界作用素

$$\partial : CF_i(Y; \mathbb{Q}) \longrightarrow CF_{i-1}(Y; \mathbb{Q})$$

が次のように定義される。 $[\rho] \in CF_i(Y; \mathbb{Q})$, $[\sigma] \in CF_{i-1}(Y)$ を生成元とする。このとき、 $-\infty$ で平坦接続 ρ に収束し、 $+\infty$ で σ に収束する $Y \times \mathbb{R}$ 上のインスタントンのモジュライ空間 $M_{\rho\sigma}$ を考える。必要ならば、 $Y \times \mathbb{R}$ 上のインスタントン方程式を摂動すると、 $M_{\rho\sigma}$ は滑らかな多様体になる。また、適当に代表元 ρ, σ を選んでおくと $M_{\rho\sigma}$ の次元は 1 になる。 $M_{\rho\sigma}$ には、平行移動により \mathbb{R} が作用する。このとき、 $M'_{\rho\sigma} = M_{\rho\sigma}/\mathbb{R}$ は有限集合になることが証明できる。

$$\langle \partial([\rho]), [\sigma] \rangle := \#M'_{\rho\sigma}$$

とおく。ただし、 $\#$ は適当に符号をつけて個数を数えることを意味する。この行列要素により、線形写像 $\partial : CF_i(Y; \mathbb{Q}) \rightarrow CF_{i-1}(Y; \mathbb{Q})$ が定まる。 $\partial \circ \partial = 0$ を証明することができ、インスタントン Floer ホモロジーを $HF_*(Y; \mathbb{Q}) = H_*(CF_*(Y; \mathbb{Q}), \partial)$ によって定義する。

3.2 張り合わせ公式

Donaldson 不変量の計算でよく用いられるのが、張り合わせ公式である。次のような状況を考える。向きをついた 4 次元多様体 X がホモロジー 3 球面 Y によって、2 つの部分に分けられているとする。つまり、 $X = X_1 \cup_Y X_2$ となっているとする。 X_1, X_2 はコンパクトな多様体で、それぞれ $Y, -Y$ を境界として持つ。ただし、 $-Y$ は Y の向きを逆にしたものである。このとき、 X_1, X_2 の相対 Donaldson 不変量から、 X の Donaldson 不変量 $\Psi_{X,w}$ を計算することができる。 $b^+(X_1) > 0, b^+(X_2) > 0$ のとき、相対 Donaldson

$$\Psi_{X_1, w_1} : \otimes H_2(X_1; \mathbb{Z}) \rightarrow HF_*(Y; \mathbb{Q}), \Psi_{X_2, w_2} : \otimes H_2(X_2; \mathbb{Z}) \rightarrow HF_*(-Y; \mathbb{Q})$$

が定義できる。ただし、 $w_i = w|_{X_i}$ である。これは $\hat{X}_i = X_i \cup (Y \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ 上のインスタントンのモジュライ空間を用いて定義される。自然な pairing

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: HF_*(Y; \mathbb{Q}) \otimes HF_*(-Y; \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

があり、

$$\Psi_{X,w} = \langle \Psi_{X_1,w_1}, \Psi_{X_2,w_2} \rangle$$

となることが証明できる。これが張り合わせ公式である。

Donaldson 不変量の変種 $\Psi_X^{u_1}$ に対する張り合わせ公式も構成されている。 Y をここでもホモロジー 3 球面とする。 $Y \times \mathbb{R}$ 上の Dirac 作用素を用いて、Floer ホモロジーの変種 $I_*(Y)$ が構成される。さらに、相対不変量

$$\Psi_{X_1}^{u_1}: A(X_1) \longrightarrow I_*(Y), \quad \Psi_{X_2}^{u_1}: A(X_2) \longrightarrow I_*(-Y)$$

が定義され

$$\Psi_X^{u_1} = \langle \Psi_{X_1}^{u_1}, \Psi_{X_2}^{u_1} \rangle$$

となる。これは、 X がスピンのとき Fukaya-Furuta-Ohta [6] によって証明され、 X が non-spin のとき [9] で証明された。

3.3 ホモロジー 3 球面以外の 3 次元多様体の Floer ホモロジー

ホモロジー 3 球面に対して、インスタントン Floer ホモロジーが定義され、不変量の張り合わせ公式が構成された。これをホモロジー 3 球面以外の 3 次元多様体 Y に拡張したいと考えるとき、次の問題が起こる。

問題 1 Y 上に可約平坦接続が存在する。

- (a) $Y \times \mathbb{R}$ 上のインスタントンのモジュライ空間に特異点がある可能性。
- (b) 仮に (a) がおこらないとしても、 $\partial \circ \partial = 0$ が成立しない。

問題 2 $H_2(X; \mathbb{Z}) \neq H_2(X_1; \mathbb{Z}) \oplus H_2(X_2; \mathbb{Z})$.

Y がホモロジー 3 球面のときは、自明な平坦接続を除いて、平坦接続は全て既約である。ホモロジー 3 球面以外の 3 次元多様体上には多くの可約な平坦接続が存在する可能性がある。また、 Y がホモロジー 3 球面の場合は、 X の 2 次元ホモロジー群が、 X_1 と X_2 の 2 次元ホモロジー群の直和となる。しかし、 Y がホモロジー 3 球面以外の 3 次元多様体の場合は、直和にはならない。これは、 X の 2 次元ホモロジー類を代表する曲面 Σ も Y によって分割される状況を考えなくてはならないことを意味する。

これらの問題はまだ完全に解かれていないが、それぞれ部分的な解答がある。問題 1 に関しては次のような仕事がある。

- Austin-Braam [2], Donaldson [3] は、ある状況のもとで、”同変 Floer ホモロジー”を導入し、可約接続が存在する状況で $\Psi_{X,w}$ の張り合わせ公式を構成した。
- Furuta [7] はレンズ空間にたいして、インスタントン Floer ホモロジーの類似物を導入した。これにより、レンズ空間に沿った Ψ_X^{alt} の張り合わせ公式を構成できる。

これらの構成は、可約平坦接続が存在する状況を扱っているが、問題 2 が起こる状況では適用できない。

一方、問題 2 に関しては、Fukaya [5] による仕事がある。Fukaya は可約平坦接続が存在しない（つまり、問題の 1 が起きない）という状況で、”Fukaya-Floer ホモロジー”と呼ばれるインスタントン Floer ホモロジーの一般化を定義し、 $\Psi_{X,w}$ の張り合わせ公式を構成した。

このように問題 1 と問題 2 は別々に扱われ、同時に起こる状況では不変量の張り合わせ公式は確立されていない。

4 主定理

4.1 レンズ空間の Floer ホモロジーと張り合わせ公式

上の問題 1 と問題 2 が同時に起こるとき、レンズ空間 $Y = L(p, q)$ のインスタントン Floer ホモロジーを定義し、不変量の張り合わせ公式を導入する。次のような状況を考える。 X を単連結、non-spin、閉 4 次元多様体で $b^+ > 1$ とする。 X がレンズ空間 $Y = L(p, q)$ によって、2つの部分に分解されているとする。つまり、 $X = X_1 \cup_Y X_2$ とかけるとする。ここで、 $\partial X_1 = L(p, q)$, $\partial X_2 = -L(p, q)$ であるとする。（ S^3 の通常の向きから誘導される向きが $L(p, q)$ に入っているとする。） X 内の向きのついた平曲面 Σ が Y によって、2つの部分 Σ_1, Σ_2 に分解されているとする。 $\gamma := \Sigma \cap Y$ とかくことにする。ただし、 Y と Σ は横断的に交わっているとする。（ γ は Y 中のループである。）

Theorem 4.1 ([10]). p が奇素数とする。

1. (Y, γ) にたいして、インスタントン Floer ホモロジー $I_*(Y, \gamma)$ が定義できて、自然な pairing

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: I_*(Y, \gamma) \otimes I_*(-Y, \gamma) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

がある。

2. $[\Sigma_1] \in H_2(X_1, Y; \mathbb{Z})$, $[\Sigma_2] \in H_2(X_2, Y; \mathbb{Z})$ がある位相的な条件を満たすとき、相対不変量 $\Psi_{X_1}^{u_1}([\Sigma_1]) \in I_*(Y, \gamma)$, $\Psi_{X_2}^{u_2}([\Sigma_2]) \in I_*(-Y, \gamma)$ が定義できて、

$$\Psi_X^{u_1}([\Sigma]) = \langle \Psi_{X_1}^{u_1}([\Sigma_1]), \Psi_{X_2}^{u_2}([\Sigma_2]) \rangle$$

となる。

この張り合わせ公式の応用として、次を示すことができる。

Theorem 4.2. $X = \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$, $Y = L(7, 3)$ とする。このとき、 X は $X = X_1 \cup_Y X_2$ の形の分解を持たない。ここで、 X_1, X_2 は $Y, -Y$ を境界として持つ単連結な *non-spin* 4次元多様体で、 $b^+ = 1$ である。

これは Donaldson 理論と Seiberg-Witten 理論との関係からみると、興味深い応用例である。Theorem 4.2 の証明では、 $\Psi_X^{u_1}$ の非自明性が重要である。(Subsection 4.3 を参照。) 一方、 $X = \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ は正のスカラー曲率を持つことから、(適当に方程式を摂動すると) モノポールのモジュライ空間は空集合である。よって、Seiberg-Witten 理論から得られる不変量は自明になってしまう。この定理を Seiberg-Witten 理論で証明することは期待できない。

4.2 $I_*(Y, \gamma)$ の構成の概略

引き続き $Y = L(p, q)$ 、 γ を Y のなかのループとする。 p は奇素数とする。

p が奇数のとき

$$\delta_Y \equiv 0 \pmod{2}$$

であることが分かる。 $i \in \mathbb{Z}$ にたいして

$$C_i(Y, \gamma) = \begin{cases} CF_{2i}(Y; \mathbb{Z}_2) \oplus CF_{2i-2}(Y; \mathbb{Z}_2) & i \not\equiv 0 \pmod{4} \\ CF_0(Y; \mathbb{Z}_2) \oplus CF_{-2}(Y; \mathbb{Z}_2) \oplus \mathbb{Z}_2 \langle [\theta] \rangle & i \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$$

とおく。ただし、 $CF_{2i}(Y; \mathbb{Z}_2)$ は Subsection 3.2 と同様に定義される。また、 θ は Y 上の自明な平坦接続である。境界作用素 $\partial_\gamma : C_i(Y, \gamma) \rightarrow C_{i-1}(Y, \gamma)$ は次の図式のようなものである。

$$\begin{array}{ccccc} C_{i+1}(Y; \gamma) & \xrightarrow{\partial_\gamma} & C_i(Y; \gamma) & \xrightarrow{\partial_\gamma} & C_{i-1}(Y; \gamma) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ CF_{2i+2}(Y) & \longrightarrow & CF_{2i}(Y) & \longrightarrow & CF_{2i-2}(Y) \\ \oplus & & \oplus & & \oplus \\ & \searrow & & \searrow & \\ CF_{2i}(Y) & \longrightarrow & CF_{2i-2}(Y) & \longrightarrow & CF_{2i-4}(Y) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
C_1(Y, \gamma) & \xrightarrow{\partial_\gamma} & C_0(Y, \gamma) & \xrightarrow{\partial_\gamma} & C_{-1}(Y, \gamma) \\
\parallel & & \parallel & & \parallel \\
CF_2(Y) & \longrightarrow & CF_0(Y) & \longrightarrow & CF_{-2}(Y) \\
\oplus & & \oplus & & \oplus \\
CF_0(Y) & \longrightarrow & CF_{-2}(Y) & \longrightarrow & CF_{-4}(Y) \\
& & \oplus & & \\
& & \mathbb{Z}_2 \langle [\theta] \rangle & &
\end{array}$$

上の図式は自明な接続 θ が関わっていない部分であり、下の図式は θ が関わる部分である。正確には次のように定義される。

$[\rho] \in C_i(Y, \gamma)$, $[\sigma] \in C_{i-1}(Y, \gamma)$ を生成元とする。

(i) $[\rho], [\sigma] \neq [\theta]$, $\delta_Y([\rho]) - \delta_Y([\sigma]) \equiv 2 \pmod{8}$ のとき

$M_{\rho\sigma}$ を $-\infty$ で平坦接続 ρ に収束し、 $+\infty$ で σ に収束する $Y \times \mathbb{R}$ 上のインスタントンのモジュライ空間とする。今の場合 $M_{\rho\sigma}$ は1次元の滑らかな多様体である。平行移動により $M_{\rho\sigma}$ に \mathbb{R} が作用している。 $M'_{\rho\sigma} = M_{\rho\sigma}/\mathbb{R}$ は有限集合になることが分かる。

$$\langle \partial_\gamma([\rho]), [\sigma] \rangle = \begin{cases} \#M'_{\rho\sigma} & \text{mod } 2 \quad \text{ind } \mathcal{D}_A \equiv 1 \pmod{2} \\ 0 & \text{mod } 2 \quad \text{ind } \mathcal{D}_A \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

ここで、 A は ρ, σ を極限にもつ $Y \times \mathbb{R}$ 上の接続で、 \mathcal{D}_A は $Y \times \mathbb{R}$ 上の twisted Dirac 作用素である。

(ii) $[\rho], [\sigma] \neq [\theta]$, $\delta_Y([\rho]) - \delta_Y([\sigma]) \equiv 4 \pmod{8}$ のとき

このとき、 $M'_{\rho\sigma}$ は2次元の多様体になる。 p が素数のとき、 $\gamma \times \mathbb{R}$ の twisted $\bar{\partial}$ 作用素の行列式束

$$\mathcal{L}_{\gamma \times \mathbb{R}} \xrightarrow{\mathbb{C}} M'_{\rho\sigma}$$

を定義することができる。 $M'_{\rho\sigma}$ はコンパクトでないが、端でよい振る舞いをする、零切断と横断的な切断

$$s : M'_{\rho\sigma} \rightarrow \mathcal{L}_{\gamma \times \mathbb{R}}$$

をとることができる、 $s^{-1}(0)$ は有限集合になる。

$$\langle \partial_\gamma([\rho]), [\sigma] \rangle = \begin{cases} \#s^{-1}(0) & \text{mod } 2 \quad \text{ind } \mathcal{D}_A \equiv 1 \pmod{2} \\ 0 & \text{mod } 2 \quad \text{ind } \mathcal{D}_A \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

(iii) $[\rho] = [\theta]$, $\delta_Y([\sigma]) \equiv -4 \pmod{8}$ または、 $[\sigma] = [\theta]$, $\delta_Y([\rho]) \equiv 2 \pmod{8}$ のとき

このとき、モジュライ空間 $M'_{\rho\sigma}$ は 0 次元となる。 $\langle \partial_\gamma([\rho]), [\sigma] \rangle$ は (i) と同様に定義される。

このように定義すると $\partial_\gamma \circ \partial_\gamma = 0$ を示すことができる。

Definition 4.3. $I_*(Y, \gamma) = H_*(C_*(Y, \gamma), \partial_\gamma)$.

4.3 Theorem 4.2 の証明の概略

$X = \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$, $Y = L(7, 3)$ とおく。 X が Theorem 4.2 で述べたような分解 $X = X_1 \cup_Y X_2$ を許したと仮定する。 [9] の中で、ある $[\Sigma] \in H_2(X; \mathbb{Z})$ があって

$$\Psi_X^{u_1}([\Sigma]) \equiv 1 \pmod{2}$$

となることが示されている。 次の 3 つの場合がある。(i) $\Sigma \subset X_1$, (ii) $\Sigma_2 \subset X_2$, (iii) $\Sigma \cap Y \neq \emptyset$.

張り合わせ公式から

$$(i) \implies \Psi_X^{u_1}([\Sigma]) = \langle \Psi_{X_1}^{u_1}([\Sigma]), \Psi_{X_2}^{u_1} \rangle, \Psi_{X_1}^{u_1}([\Sigma]) \in I_1(Y)$$

$$(ii) \implies \Psi_X^{u_1}([\Sigma]) = \langle \Psi_{X_1}^{u_1}, \Psi_{X_2}^{u_1}([\Sigma]) \rangle, \Psi_{X_1}^{u_1} \in I_2(Y),$$

$$(iii) \implies \Psi_X^{u_1}([\Sigma]) = \langle \Psi_{X_1}^{u_1}([\Sigma_1]), \Psi_{X_2}^{u_1}([\Sigma_2]) \rangle, \Psi_{X_1}^{u_1}([\Sigma_1]) \in I_2(Y, \gamma)$$

となる。ここで、 $I_*(Y)$ は [7] で構成された Floer ホモロジーである。

$I_*(Y), I_*(Y, \gamma)$ は $Y \times \mathbb{R}$ 上のインスタントンを用いて定義される。 $L(p, q) \times \mathbb{R}$ 上のインスタントンは、Austin [1], Furuta-Hashimoto [8] によって調べられている。これらの結果を用いると、 $I_1(Y) = 0, I_2(Y) = 0, I_2(Y, \gamma) = 0$ が分かる。したがって、 $\Psi_X^{u_1}([\Sigma]) = 0$ となり、矛盾が得られる。

参考文献

- [1] D. M. Austin, *SO(3)-instantons on $L(p, q) \times \mathbb{R}$* , J. Differential Geom. **32** (1990), 383–413.
- [2] D. M. Austin and P. J. Braam, *Equivariant Floer theory and gluing Donaldson polynomials*, Topology **35** (1996), 167–200.
- [3] S. K. Donaldson, *Floer homology groups in Yang-Mills theory*, With the assistance of M. Furuta and D. Kotschick. Cambridge Tracts in Mathematics, 147. Cambridge University Press, Cambridge, 2002

- [4] A. Floer, *An instanton-invariant for 3-manifolds*, Comm. Math. Phys. **118** (1988), 215–240.
- [5] K. Fukaya, Floer homology for oriented 3-manifolds, Aspects of low-dimensional manifolds, 1–92, Adv. Stud. Pure Math., 20, Kinokuniya, Tokyo, 1992.
- [6] K. Fukaya, M. Furuta and H. Ohta, unpublished manuscript.
- [7] M. Furuta, \mathbb{Z}_a -invariant $SU(2)$ instantons over the four sphere, Geometry of low-dimensional manifolds, 1 (Durham, 1989), 161–174, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 150, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [8] M. Furuta and Y. Hashimoto, *Invariant instantons on S^4* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **37** (1990), 585–600.
- [9] H. Sasahira, *Floer homology for 2-torsion instanton invariant*, preprint.
- [10] H. Sasahira, *Instanton Floer homology for lens spaces*, preprint.

Toric degenerations of polygon spaces and bending flows

野原 雄一

香川大学 教育学部

1 序

(X, ω) を $2N$ 次元シンプレクティック多様体としたとき, X 上の完全可積分系とは N 個の関数の組 $\Phi = (f_1, \dots, f_N) : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ で, 次の二つの条件

- (i) 互いに Poisson 可換, つまり $\{f_i, f_j\} = 0, i, j = 1, \dots, N,$
- (ii) df_1, \dots, df_N はある稠密な開集合上で一次独立

を満たすもののことをいう. f_1, \dots, f_N からひとつ (例えば f_1) を選んでそれを Hamiltonian だと思ったとき, (i) の条件は f_i たちが f_1 の Hamilton 系の第一積分 (保存量) だということを意味している. つまり独立な第一積分が可能な限りたくさん (= N 個) あるという状況であり, その意味でこれを完全可積分系と呼ぶ. ただしこの話ではどれが Hamiltonian であるかという指定はしない.

以下で考えるのは X がコンパクトな場合であるが, このとき Φ の一般のファイバー $\Phi^{-1}(u)$ (の連結成分) は **Lagrange トーラス** である (Arnold-Liouville の定理). すなわち $\Phi^{-1}(u)$ は N 次元トーラス (の和集合) で $\omega|_{\Phi^{-1}(u)} = 0$ を満たす. このような Lagrange 部分多様体によるファイブレーションの構造は幾何学的量子化やミラー対称性などで重要となる.

典型的な例は X がトーリック多様体の場合で, 自然なトーラス作用の運動量写像

$$\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^N = (\text{Lie } T^N)^*$$

が完全可積分系である. このとき Φ による X の像 $\Delta := \Phi(X) \subset \mathbb{R}^N$ は運動量多面体と呼ばれる凸多面体になる. X の構造の多くは Δ の組み合わせ論的情報を用いて具体的に記述することができる. このことはトーリック多様体の場合にミラー対称性がよく理解されている理由のひとつである (特にシンプレクティック側 (正則円盤の数え上げ) では具体的な記述を本質的に使っている議論がある ([1], [3] を参照)).

トーリック多様体の場合以外にはこのように具体的な記述があることはほとんど期待できない (例えば正則円盤を具体的に記述するのは旗多様体の場合でさえ困難である). そこで, 多様体を完全可積分系の構造もこめてトーリック多様体に退化させること (完全可積分系のトーリック退化) を考える.

定義 1.1. (X, ω) は射影的な Kähler 多様体とし, X 上の完全可積分系 $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ は像が凸多面体 Δ となるように関数を取り直しておくものとする (つまり作用変数をとっておく). このとき Φ の **トーリック退化**とは,

- 射影的 Kähler 多様体の平坦な族 $f : \mathfrak{X} \rightarrow B$,
- 区分的に滑らかな底空間の道 $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$,
- γ に制限した族の全空間上の連続写像 $\tilde{\Phi} : \mathfrak{X}|_{\gamma([0,1])} \rightarrow \mathbb{R}^N$,
- $\mathfrak{X}|_{\gamma([0,1])}$ (の稠密な開集合) 上のベクトル場 ξ で γ の速度ベクトルの持ち上げとなっているもの

の組で次の条件を満たすものをいう.

- 各 $t \in [0, 1]$ に対し, $\Phi_t := \tilde{\Phi}|_{X_t}$ は $X_t = f^{-1}(\gamma(t))$ 上の完全可積分系,
- X_1 は Kähler 多様体として X と同型であり, その同一視のもとで $\Phi_1 = \Phi$,
- X_0 は Δ から決まるトーリック多様体で, Φ_0 はトーラス作用の運動量写像を与える,
- (稠密な開集合上で) $\phi_t = \exp(t\xi)$ は完全可積分系の構造を保ったままファイバー $X_{t'}$ を別のファイバー $X_{t'-t}$ に移す:

$$\begin{array}{ccc}
 X_{t'} & \xrightarrow{\phi_t} & X_{t'-t} \\
 & \searrow \Phi_{t'} & \swarrow \Phi_{t'-t} \\
 & & \mathbb{R}^N
 \end{array}$$

[10] では Gelfand-Cetlin 系と呼ばれる旗多様体上の完全可積分系に対してそのトーリック退化を構成し, それを正則円盤の数え上げ問題に応用している.

この講演では

- \mathbb{R}^3 内の多角形のモジュライ空間¹ 上の bending Hamiltonian と呼ばれる関数たちからなる完全可積分系,
- 射影直線 $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ 上の放物的 $SU(2)$ 束のモジュライ空間上に定まる完全可積分系 (Goldman 系と呼ぶことにする)

がトーリック退化を持つこととお話したい. なお, これらの場合にも Floer 理論への応用は重要な問題だと思われるが, それは今後の課題である.

¹ \mathbb{R}^3 内の多角形と聞いて何が面白いのだろうと思われる方もいらっしゃるかもしれないが, 実は次の項目の放物的ベクトル束のモジュライや Grassmann 多様体, 射影直線上の点配置 ([2], [5] 参照) などと関係していて, 意外に (?) 深い例である.

2 \mathbb{R}^3 内の多角形のモジュライ空間

2.1 多角形のモジュライ空間と Grassmann 多様体

n 個の正の実数の組 $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ を固定し, $|\mathbf{r}| = \sum_i r_i$ と書くことにする. このとき多角形のモジュライ空間 $\mathcal{P}_{\mathbf{r}} = \mathcal{P}_{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^3)$ とは, \mathbb{R}^3 内の辺の長さが r_1, \dots, r_n である n 角形の Euclid 等長変換群による同値類の集合のことである. 言い換えると

$$\mathcal{P}_{\mathbf{r}} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n S^2(r_i) \mid x_1 + \dots + x_n = 0 \right\} / SO(3)$$

である (x_1, \dots, x_n が n 角形の辺). ただし $S^2(r_i) \subset \mathbb{R}^3$ は原点中心, 半径 r_i の球面であり, $SO(3)$ 作用は対角作用を考える. \mathbf{r} を一般にとると $\mathcal{P}_{\mathbf{r}}$ は滑らかな $2(n-3)$ 次元多様体となる.

さらに $\mathcal{P}_{\mathbf{r}}$ は以下のようにしてシンプレクティック多様体 (より強く Kähler 多様体) となる. \mathbb{R}^3 を $SU(2)$ の Lie 環の双対 $\mathfrak{su}(2)^*$ と同一視すると, $S^2(r_i)$ はある余随伴軌道 \mathcal{O}_{r_i} と同一視される. ここには自然なシンプレクティック形式 (Kostant-Kirillov 形式) があることに注意する.² また \mathbb{R}^3 への $SO(3)$ 作用は $SU(2)$ の $\mathfrak{su}(2)^*$ への余随伴作用から得られる. このとき $\mathcal{O}_{r_1} \times \dots \times \mathcal{O}_{r_n}$ への $SU(2)$ の対角作用は Hamiltonian で, その運動量写像は

$$\mu : \mathcal{O}_{r_1} \times \dots \times \mathcal{O}_{r_n} \longrightarrow \mathfrak{su}(2)^*, \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1 + \dots + x_n$$

で与えられる. したがって $\mathcal{P}_{\mathbf{r}}$ は $\mathcal{O}_{r_1} \times \dots \times \mathcal{O}_{r_n}$ の $SU(2)$ 作用によるシンプレクティック簡約である:

$$\mathcal{P}_{\mathbf{r}} \cong \mu^{-1}(0)/SU(2).$$

誘導されるシンプレクティック形式を $\omega_{\mathbf{r}}^{\mathfrak{su}(2)}$ であらわすことにする.

$\mathcal{P}_{\mathbf{r}}$ は Grassmann 多様体のシンプレクティック簡約としても得られる ([6]). $Gr(2, n)$ を \mathbb{C}^n の 2 次元部分空間のなす Grassmann 多様体とすると, これは $n \times 2$ 行列全体 $\mathbb{C}^{n \times 2}$ の $U(2)$ 作用によるシンプレクティック簡約として得られる. $\mu_{U(2)} : \mathbb{C}^{n \times 2} \rightarrow \mathfrak{u}(2)^* \cong \sqrt{-1}\mathfrak{u}(2)$ を $U(2)$ 作用の運動量写像とすると,

$$\begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ \vdots & \vdots \\ z_n & w_n \end{pmatrix} \in \mu_{U(2)}^{-1} \left(\begin{pmatrix} |\mathbf{r}|/2 & 0 \\ 0 & |\mathbf{r}|/2 \end{pmatrix} \right)$$

は

$$\sum_i |z_i|^2 = \sum_i |w_i|^2 = \frac{1}{2}|\mathbf{r}|, \quad \sum_i z_i \bar{w}_i = 0 \quad (1)$$

を満たす. ここで $SU(2)$ の自然な \mathbb{C}^2 への作用を考えると, その運動量写像は

$$\nu_{SU(2)} : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathfrak{su}(2)^* \cong \sqrt{-1}\mathfrak{su}(2), \quad (z, w) \longmapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |z|^2 - |w|^2 & 2z\bar{w} \\ 2\bar{z}w & |w|^2 - |z|^2 \end{pmatrix}$$

²適当に正規化した $S^2(r_i)$ の面積要素といってもよい.

で与えられる. $(\nu_{SU(2)})^n : \mathbb{C}^{n \times 2} \rightarrow (\mathfrak{su}(2)^*)^n$ という写像を考えると, (1) の条件のもとで

$$(\nu_{SU(2)}(z_1, w_1), \dots, \nu_{SU(2)}(z_n, w_n))$$

は $\mathfrak{su}(2)^* \cong \mathbb{R}^3$ の n 角形を与える (すなわち $\sum_i \nu_{SU(2)}(z_i, w_i) = 0$ を満たす). $U(n)$ の対角行列のなす極大トーラスを T としたとき, $Gr(2, n)$ への T 作用の運動量写像 $\mu_T : Gr(2, n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ は

$$\begin{bmatrix} z_1 & w_1 \\ \vdots & \vdots \\ z_n & w_n \end{bmatrix} \mapsto (|z_1|^2 + |w_1|^2, \dots, |z_n|^2 + |w_n|^2)$$

で与えられることに注意すると,

$$\mathcal{P}_r \cong \mu_T^{-1}(r)/T$$

となることが分かる.

2.2 Bending Hamiltonian

n 角形 $\mathbf{x} \in \mathcal{P}_r$ と $i+1 < j$ に対し, $d_{ij} = x_i + x_{i+1} + \dots + x_j$ を $(i-1)$ 番目の頂点と j 番目の頂点を結ぶ対角線とし, その長さを与える関数を $l_{ij} : \mathcal{P}_r \rightarrow \mathbb{R}$ とする. すなわち

$$l_{ij}(\mathbf{x}) = |d_{ij}| = |x_i + x_{i+1} + \dots + x_j|$$

である. これを bending Hamiltonian と呼ぶ.

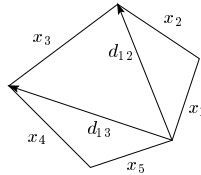
定理 2.1 (Kapovich-Millson [8]). l_{ij} の Hamiltonian flow は多角形を対角線 d_{ij} に沿って一定の速さで折り曲げるといふ S^1 作用を定める. さらに d_{ij} と d_{kl} が“交わっていない” (すなわち $i < k < j < l, k < i < l < j$ でない) ならば, l_{ij} と l_{kl} は Poisson 可換である. したがって n 角形の三角形分割を選ぶごとに $(n-3)$ 本の対角線ができることに注意) \mathcal{P}_r に完全可積分系が定まる.

この三角形分割, もしくはその双対グラフを Γ とし, それに対応する完全可積分系を $\Phi^\Gamma : \mathcal{P}_r \rightarrow \mathbb{R}^{n-3}$ と書くことにすると, この l_{ij} たちは作用変数であり, Φ^Γ による像は三角不等式で与えられる凸多面体となる.

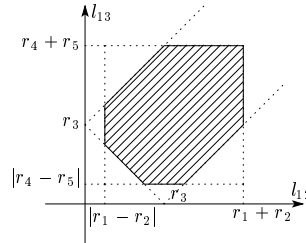
例 2.2 ($n=5$ の場合). 対角線として d_{12}, d_{13} を選び (五角形の場合は三角形分割の仕方は本質的に一意的である), 完全可積分系として

$$\Phi^\Gamma = (l_{12}, l_{13}) : \mathcal{P}_r \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

を考えることにする ($\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_r = 4$ だから完全可積分系は関数が二つ).



\mathcal{P}_r は辺の長さの選び方によって異なるが, ここでは r_1, \dots, r_5 がほぼ同じ場合を考える. このとき \mathcal{P}_r は $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ の 4 点ブローアップで, Φ^Γ による像 $\Delta^\Gamma = \Phi^\Gamma(\mathcal{P}_r)$ は下の図のようになる.



Δ^Γ は $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ の二点を二回ずつブローアップしたトーリック多様体の運動量多面体であり, \mathcal{P}_r のブローアップした点を二点ずつ近づけていくと \mathcal{P}_r のトーリック退化が得られる.

2.3 トーリック退化

\mathcal{P}_r は $Gr(2, n)$ の極大トーラス T によるシンプレクティック簡約により得られたので, \mathcal{P}_r の (射影多様体としての) トーリック退化は $Gr(2, n)$ の T 不変なトーリック退化から得られる. 一方 Speyer-Sturmfels [11] により, n 角形の三角形分割を選ぶごとに $Gr(2, n)$ のトーリック退化が与えられることが示されている.

定理 2.3. 各三角形分割 Γ に対し, $Gr(2, n)$ の完全可積分系で T 作用によるシンプレクティック簡約が \mathcal{P}_r 上の完全可積分系 Φ^Γ を誘導するものがある. さらにこの完全可積分系は Γ から定まる $Gr(2, n)$ のトーリック退化の上でトーリック多様体上の運動量写像に変形できる.

系 2.4. 定理 2.3 の $Gr(2, n)$ 上の完全可積分系のトーリック退化は $\Phi^\Gamma : \mathcal{P}_r \rightarrow \mathbb{R}^{n-3}$ のトーリック退化を誘導する.

注意 2.5. 三角形分割として対角線が $d_{12}, d_{13}, \dots, d_{1, n-2}$ であるもの (つまりすべての対角線がひとつの頂点から出ているもの) をとった場合, $Gr(2, n)$ 上の Gelfand-Cetlin 系が定理 2.3 の完全可積分系であり ([6]), そのトーリック退化は [10] で構成されたものである.

3 射影直線上の放物的 $SU(2)$ 束のモジュライ空間

3.1 放物的 $SU(2)$ 束のモジュライと S^3 の多角形

$p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ と $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$ を固定し, $\Sigma = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 - \{p_1, \dots, p_n\}$ とおく. Σ 上の放物的 $SU(2)$ 接続とは Σ 上の平坦な $SU(2)$ 接続で, 各 p_i の周りのホロノミーが

$$\begin{pmatrix} e^{\sqrt{-1}r_i} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}r_i} \end{pmatrix}$$

の共役類 C_{r_i} に入るものをいう. $\mathcal{M}_r = \mathcal{M}_r(\Sigma, SU(2))$ を Σ 上の放物的 $SU(2)$ 接続のモジュライ空間とすると, 一般の r に対してこの空間は $2(n-3)$ 次元のシンプレクティック多様体となる. このシンプレクティック形式を $\omega_r^{SU(2)}$ と書くことにする.

$r = (r_1, \dots, r_n)$ が十分小さいとき, このモジュライ空間は前節の n 角形のモジュライ空間と同型になることが知られている (例えば [7] 参照):

$$\mathcal{P}_r \cong \mathcal{M}_r.$$

この同型を構成することは Riemann-Hilbert 問題を解くことと同じことであり, 具体的に記述するのは難しいため, ここでは以下のようにして考えることにする. p_i の周りを回るループを γ_i とすると, Σ の基本群は

$$\pi_1(\Sigma) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \mid \gamma_1 \dots \gamma_n = 1 \rangle$$

と与えられることに注意する. Mehta-Seshadri [9] により \mathcal{M}_r は $\pi_1(\Sigma)$ の表現の同型類の空間と同一視できる:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_r &\cong \{ \rho \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma), SU(2)) \mid \rho(\gamma_i) \in C_{r_i}, i = 1, \dots, n \} / SU(2) \\ &= \left\{ (g_1, \dots, g_n) \in \prod_i C_{r_i} \mid g_1 \dots g_n = 1 \right\} / SU(2). \end{aligned}$$

C_{r_i} は $SU(2)$ の 1 のまわりの距離球であるので, \mathcal{M}_r の元は辺の長さが決まった $SU(2) \cong S^3$ 内の n 角形のモジュライだと思えることができる ($1, g_1, g_1 g_2, \dots, g_1 g_2 \dots g_{n-1}$ が頂点). r を小さくにとっておけば, $SU(2)$ を以下のようにリスケールすることにより $SU(2)$ の多角形のモジュライと $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{su}(2)^*$ の多角形のモジュライをつなぐ 1 変数族を構成することができる. $t \in (0, 1]$ に対し $tr = (tr_1, \dots, tr_n)$ とし,

$$M_t := \left(\mathcal{M}_{tr}, \frac{1}{t} \omega_{tr}^{SU(2)} \right)$$

と定める. また $t = 0$ のときは $M_0 = (\mathcal{P}_r, \omega_r^{\mathfrak{su}(2)})$ とおくと, $\bigcup_{t \in [0, 1]} M_t$ が \mathcal{P}_r と \mathcal{M}_r をつなぐシンプレクティック多様体の族となる.

3.2 Goldman 系

n 角形の対角線 d_{ij} に対し γ_{ij} を p_i, p_{i+1}, \dots, p_j を囲むループとする (基本群の元としては $\gamma_i \gamma_{i+1} \dots \gamma_j$). このループに沿ったホロノミーを用いて関数 $f_{ij} : \mathcal{M}_r \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f_{ij}(A) := \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \text{tr}(A \text{ の } \gamma_{ij} \text{ に沿ったホロノミー}) \right)$$

で定める.

定理 3.1 (Goldman [4]). 対角線 d_{ij} と d_{kl} が交わらないとき f_{ij} と f_{kl} は Poisson 可換である. 特に三角形分割 Γ に対して, その対角線に対応する f_{ij} たちで与えられる

$$\Psi^\Gamma = (f_{ij}) : \mathcal{M}_r \longrightarrow \mathbb{R}^{n-3}$$

は完全可積分系である.

ここではこの完全可積分系を **Goldman 系** と呼ぶことにする.

命題 3.2. $t \in (0, 1]$ に対して $f_{ij,t} : M_t \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f_{ij,t} := \frac{1}{t} f_{ij}$$

で定めると, $\Psi_t^\Gamma = (f_{ij,t}) : M_t \rightarrow \mathbb{R}^{n-3}$ は Goldman 系と $\Phi^\Gamma : \mathcal{P}_r \rightarrow \mathbb{R}^{n-3}$ をつなぐ完全可積分系の 1 変数族を与える.

これと系 2.4 をあわせて次が得られる.

系 3.3. Goldman 系 はトーリック退化を持つ.

References

- [1] C.-H. Cho and Y.-G. Oh, *Floer cohomology and disc instantons of Lagrangian torus fibers in Fano toric manifolds*, Asian J. Math. 10 (2006), 773–814.
- [2] P. Deligne and G. D. Mostow, *Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy*, Publications Mathématiques de l’IHÉS 63 (1986), 5–89.
- [3] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds I*, arXiv:0802.1703.
- [4] W. M. Goldman, *Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations*, Invent. Math. 85 (1986), 263–302.
- [5] Y. Hu, *Moduli Spaces of Stable Polygons and Symplectic Structures on $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$* , Compositio Mathematica 118 (1999), 159–187.
- [6] J. C. Hausmann and Knutson, *Polygon spaces and Grassmannians*, L’Enseignement Mathématique 43 (1997), 173–198, arXiv:dg-ga/9602012.
- [7] L. C. Jeffrey, *Extended moduli spaces of flat connections on Riemann surfaces*, Math. Ann. 298 (1994), 667–692.
- [8] M. Kapovich and J. Millson, *The symplectic geometry of polygons in Euclidean space*, J. Differential Geom. 44 (1996), 479–513.
- [9] V. B. Mehta and C. S. Seshadri, *Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures*, Math. Ann. 248 (1980), 205–239.
- [10] T. Nishinou, Y. Nohara, and K. Ueda, *Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions*, preprint, arXiv:0810.3470.
- [11] D. Speyer, B. Sturmfels, *The tropical grassmannian*, Adv. Geom. 4 (2004), 389–411.

代数曲面の DONALDSON 不変量について

KŌTA YOSHIOKA

ABSTRACT. We show that the Donaldson-invariant of $SU(2)$ -type coincides with the Seiberg-Witten invariant, if the base 4 manifold has a complex algebraic structure. This is a joint work with Lothar Göttsche and Hiraku Nakajima.

0.1. Donaldson invariants. Let X be a smooth, compact, connected, and oriented 4-manifold with $b_1 = 0$ and $b_+ \geq 3$ odd. We set

$$(K_X^2) := 2\chi(X) + 3\sigma(X), \quad \chi_h(X) := \frac{\chi(X) + \sigma(X)}{4}.$$

If X is a complex projective surface, then

$$(0.1) \quad \begin{aligned} (K_X^2) &= \text{the self-intersection of the canonical bundle } K_X, \\ \chi_h(X) &= \chi(\mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

For $y := (2, \xi, n) \in H^{\text{even}}(X, \mathbb{Z})$, let P be the principal $U(2)$ -bundle P with $c_1(P) = \xi$, $c_2(P) = n$ and $\text{ad}(P)$ the adjoint bundle of P .

Definition 0.2 (Moduli of ASD connections). We take a Riemann metric g on X and set

$$M_g(y) := \{\nabla : \text{irreducible anti-self-dual connections on } \text{ad}(P)\}.$$

For a generic metric g , $M_g(y)$ is a manifold of dimension $8n - 2(\xi^2) - 6\chi_h(X)$. A choice of an orientation of H^+ , a maximal positive definite subspace of $H^2(X)$ with respect to the intersection pairing, gives an orientation on $M_g(y)$.

Let $\mathcal{P} \rightarrow X \times M_g(y)$ be a universal $PU(2)$ -bundle and let

$$\mu: H_i(X) \rightarrow H^{4-i}(M(y))$$

be the μ -map defined by

$$\mu(\beta) := -\frac{1}{4}p_1(\mathcal{P})/\beta.$$

Then the Donaldson invariant of X is a polynomial on $H_0(X) \oplus H_2(X)$ defined by

$$(0.3) \quad D^{\xi, n}(\alpha^k p^l) = \int_{M_g(y)} \mu(\alpha)^k \mu(p)^l,$$

where $p \in H_0(X)$ is the point class and $\alpha \in H_2(X)$. More generally, we set

$$D^{\xi, n}(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k p^l) := \int_{M_g(y)} \mu(\alpha_1) \mu(\alpha_2) \cdots \mu(\alpha_k) \mu(p)^l,$$

where $\alpha_i \in H_2(X)$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 14D20.

Remark 0.4. $D^{\xi,n}(\alpha^k p^l) \neq 0$ only when $k + 2l = 4n - (\xi^2) - 3\chi_h(X)$.

As $M_g(y)$ is not compact, the integral must be justified by using the Uhlenbeck compactification $M_g^U(y)$ of $M_g(y)$. If $\xi \not\equiv 0 \pmod{2}$, then it is given by

$$M_g^U(2, \xi, n) = M_g(2, \xi, n) \cup M_g(2, \xi, n-1) \times X \cup M_g(2, \xi, n-2) \times S^2 X \cup \dots$$

Proposition 0.5. *Assume that $b_+ \geq 3$. Then $D^{\xi,n}(\alpha^k p^l)$ is independent of the choice of a general g .*

Remark 0.6. The moduli space does not change by a twisting of P by a line bundle, since the adjoint bundle remains the same. Only the orientation is different. Thus the integral depends only on $\xi \pmod{2} \in H^2(X, \mathbb{Z}/2)$ up to sign.

We consider the generating function

$$D^\xi(e^{\alpha z + p x}) = \sum_{n,k,l} D^{\xi,n}(\alpha^k p^l) \frac{z^k x^l}{k! l!} \Lambda^{4n - (\xi^2) - 3\chi_h(X)}.$$

Definition 0.7. A 4-manifold X is of *KM-simple type* if for any ξ and α ,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} D^\xi = 4\Lambda^4 D^\xi.$$

For a 4-manifold of KM-simple type, we define

$$(0.8) \quad \mathcal{D}^\xi(\alpha) := D^\xi(e^\alpha(1 + \frac{1}{2}p)) = \sum_{n,k} D^{\xi,n}(\alpha^k) \frac{1}{k!} + \frac{1}{2} \sum_{n,k} D^{\xi,n}(\alpha^k p) \frac{1}{k!}.$$

Then Kronheimer and Mrowka proved the following structure theorem.

Theorem 0.9 (Kronheimer-Mrowka). *Assume that X is of KM-simple type. Then there are finite number of $K_i \in H^2(X, \mathbb{Z})$ and nonzero rational numbers β_i such that*

$$\mathcal{D}^\xi(\alpha) = e^{\frac{(\alpha^2)}{2}} \sum_i (-1)^{\frac{(\xi, \xi + K_i)}{2}} \beta_i e^{(K_i, \alpha)}.$$

Each K_i is an integral lift of the second Stiefel-Whitney class $w_2(X)$.

0.2. Donaldson invariants for complex projective surfaces. From now on,

- X is a complex projective surface and
- ξ is of type $(1, 1)$.

Take an ample line bundle H and consider the moduli space

$$M_H(y) := \left\{ E \left| \begin{array}{l} E \text{ is a } H\text{-semistable torsion free sheaf,} \\ \text{rk } E = 2, c_1(E) = \xi, c_2(E) = n \end{array} \right. \right\} / \text{S-equiv.}$$

$M_H(y)$ is a complex projective scheme of $\dim_{\mathbb{C}} M_H(y) \geq 4n - \xi^2 - 3\chi_h(X)$. If $\dim_{\mathbb{C}} M_H(y) = 4n - \xi^2 - 3\chi_h(X)$, then we say $M_H(y)$ is of expected dimension. We take the orientation on H^+ given by $c_1(H)$ and the complex orientation on $H^{0,2}(X)$. Let $M_H(y)_0$ be the open subset of slope stable vector bundles. By the Kobayashi-Hitchin correspondence, we can identify $M_H(y)_0$ with the moduli of ASD connections.

Theorem 0.10 (Donaldson). *$M_H(y)_0 \cong M_h(y)$, where h is the metric associated to H .*

Then the Uhrenbeck compactification $M_h^U(y)$ becomes a projective scheme. We denote $M_h^U(y)$ by $M_H^U(y)$. If $\xi \not\equiv 0 \pmod{2}$ is primitive, then

$$M_H^U(2, \xi, n) = M_H(2, \xi, n)_0 \cup M_H(2, \xi, n-1)_0 \times X \cup M_H(2, \xi, n-2)_0 \times S^2 X \cup \dots$$

Theorem 0.11 (J. Li, J. Morgan). (1) *There is a projective morphism $\phi : M_H(y) \rightarrow M_H^U(y)$. If $\xi \not\equiv 0 \pmod{2}$, then ϕ is*

$$(0.12) \quad \begin{array}{ccc} M_H(y) & \rightarrow & M_H^U(y) \\ E & \mapsto & (E^{\vee\vee}, \text{Supp}(E^{\vee\vee}/E)). \end{array}$$

(2) *If $M_H(y)$ is of expected dimension, then*

$$D^{\xi, n}(\alpha^k p^l) = (-1)^{\frac{(\xi, \xi + K_X)}{2}} \int_{M_H(y)} \mu(\alpha)^k \mu(p)^l,$$

where the μ -map is defined by using a universal sheaf \mathcal{E} instead of \mathcal{P} , as $\mu(\beta) = (c_2(\mathcal{E}) - c_1(\mathcal{E})^2/4)/\beta$.

Remark 0.13. $(-1)^{\frac{(\xi, \xi + K_X)}{2}}$ comes from the difference of the orientation.

If $M_H(y)$ is not of expected dimension, then we consider the blow-up $\pi : X' \rightarrow X$ at points p_1, \dots, p_N . Let $C_i := \pi^{-1}(p_i) (\cong \mathbb{P}^1)$ be the exceptional curves. Then for $y' = (2, \eta, n)$ with $\eta = \pi^*(\xi) + \sum_i C_i$,

$$\dim M_{H'}(y') = 4n - (\eta^2) - 3\chi_h(X)$$

for $N \gg 0$, where $H' = k\pi^*(H) - \sum_i C_i$, $k \gg 0$. By the blow-up formula

$$(0.14) \quad \begin{aligned} D^{\xi, n}(\alpha^k p^l) &= (-1)^N D^{\eta, n}(\pi^*(\alpha^k) p^l \prod_i C_i) \\ &= (-1)^N \int_{M_g(y')} \mu(\pi^*(\alpha))^k \mu(p)^l \prod_i \mu(C_i) \\ &= (-1)^N (-1)^{(\eta, \eta + K_{X'})/2} \int_{M_{H'}(y')} \mu(\pi^*(\alpha))^k \mu(p)^l \prod_i \mu(C_i), \end{aligned}$$

we can compute $D^{\xi, n}$ by the algebro-geometric method.

0.3. Mochizuki's definition. Mochizuki defines the invariants by using the obstruction theory on the moduli spaces of pairs of sheaves and their sections with a suitable stability condition δ .

$$M_H(y, m, \delta) := \left\{ (E, \phi) \left| \begin{array}{c} \mathcal{O}_X(-mH) \xrightarrow{\phi} E \\ (E, \phi) : \delta\text{-semi-stable} \end{array} \right. \right\} /_{\text{S-equiv.}}.$$

Roughly speaking, the following hold, and we can compute the Donaldson invariants by analysing the wall-crossing phenomenon.

(1) Assume that $\delta \ll 0$. Then $M_H(y, m, \delta) = \emptyset$.

- (2) Assume that $\delta \gg 0$. If y is primitive, then (E, ϕ) is stable iff E is stable. Thus $\psi : M_H(y, m, \delta) \rightarrow M_H(y)$ is a projective bundle for $m \gg 0$. Mochizuki's invariant is defined by

$$D_{\text{Moc}}^{\xi, n}(\alpha^k p^l) := (-1)^{\frac{(\xi, \xi + K_X)}{2}} \int_{[M_H(y, m, \delta)]_{\text{vir}}} \mu(\alpha)^k \mu(p)^l c_1(\mathcal{O}(1))^d$$

where $d = \dim M_H(y, m, \delta) - \dim M_H(y)$, $\mathcal{O}(1)$ is the tautological line bundle of ψ and $[M_H(y, m, \delta)]_{\text{vir}}$ is the virtual fundamental class of $M_H(y, m, \delta)$.

Remark 0.15. Mochizuki proved that $D_{\text{Moc}}^{\xi, n}$ does not depend on the choice of $m \gg 0$.

If the moduli space $M_H(y)$ is of expected dimension, then

$$[M_H(y, m, \delta)]_{\text{vir}} = [M_H(y, m, \delta)] \text{ (ordinary fundamental class),}$$

and hence

$$D_{\text{Moc}}^{\xi, n} = D^{\xi, n}$$

for $\xi \in H^{1,1}(X)$ with $\xi \not\equiv 0 \pmod{2}$.

Proposition 0.16. *Assume that $D_{\text{Moc}}^{\xi, n}$ satisfies the blow-up formula (0.14). Then $D_{\text{Moc}}^{\xi, n} = D^{\xi, n}$.*

Remark 0.17. The assumption is proved in the proof of our main result (Theorem 0.21).

Proof. We take a blow-up $X' \rightarrow X$ at sufficiently many points p_1, \dots, p_N of X such that $M_{H'}(y')$ is of expected dimension, where $H' = k\pi^*(H) - \sum_i C_i$, $k \gg 0$.

- (1) Since $\eta \not\equiv 0 \pmod{2}$, $M_{H'}(y', m, \delta) \rightarrow M_{H'}(y')$ is a projective bundle for $\delta \gg 0$.
- (2) By the assumption, we have $[M_{H'}(y', m, \delta)]_{\text{vir}} = [M_{H'}(y', m, \delta)]$. Hence we get $D_{\text{Moc}}^{\eta, n} = D^{\eta, n}$.
- (3) Since $D^{\eta, n}$ satisfies (0.14), if $D_{\text{Moc}}^{\eta, n}$ also satisfies (0.14), then $D_{\text{Moc}}^{\eta, n} = D^{\eta, n}$.

□

0.4. Seiberg-Witten invariants. Let \mathfrak{s} be a spin^c structure and let $c_1(\mathfrak{s}) = c_1(S^+) \in H^2(X)$ be the first Chern class of its spinor bundle.

Let $N(\mathfrak{s})$ be the moduli space of the solutions of monopole equations. This is a compact manifold (more precisely, after a perturbation) of dimension $d(\mathfrak{s}) := (c_1(\mathfrak{s})^2 - (K_X)^2)/4$. It has the orientation induced from that of H^+ as in the case of Donaldson invariants. Let \mathcal{Q} be the S^1 -bundle associated with the evaluation homomorphism from the gauge group at a point in X , and $c_1(\mathcal{Q})$ be its first Chern class. The Seiberg-Witten invariant of \mathfrak{s} is defined as

$$\text{SW}(\mathfrak{s}) := \int_{N(\mathfrak{s})} c_1(\mathfrak{s})^{d(\mathfrak{s})/2}$$

This is independent of the choice of g and the perturbation.

We call \mathfrak{s} (or $c_1(\mathfrak{s})$) a Seiberg-Witten class if $\text{SW}(\mathfrak{s}) \neq 0$. It is known that there are only finitely many Seiberg-Witten classes.

Definition 0.18. A 4-manifold X is of *SW-simple type* if $\text{SW}(\mathfrak{s})$ is zero for all \mathfrak{s} with $d(\mathfrak{s}) > 0$.

For $c \in H^2(X; \mathbb{Z})$ which is a lift of $w_2(X)$, we define $\text{SW}(c)$ as the sum

$$\text{SW}(c) = \sum_{c_1(\mathfrak{s})=c} \text{SW}(\mathfrak{s}).$$

When X is a complex projective surface, it is known that

- all Seiberg-Witten classes are of type $(1,1)$.
- $$N(\mathfrak{s}) = \{(L, \phi) | L : \text{a holomorphic line bundle, } \phi \in H^0(X, L)\}.$$
- It is an unperturbed moduli space, and does not have the expected dimension $d(\mathfrak{s})$ in general, but can be equipped with an obstruction theory to define the invariants.
- X is of SW-simple type.

0.5. **Witten's conjecture.** By a physical argument, Witten clarified the meaning of Kronheimer-Mrowka's structure theorem. Since Witten's argument is not justified in a mathematical sense, we call it Witten's conjecture.

Conjecture 0.19 (Witten). If X is of SW-simple type, then it is also of KM-simple type and β_i, K_i are determined by Seiberg-Witten invariants:

$$\mathcal{D}^\xi(\alpha) = 2^{(K_X^2) - \chi_h(X) + 2} (-1)^{\chi_h(X)} e^{\frac{(\alpha^2)}{2}} \sum_{\mathfrak{s}} \text{SW}(\mathfrak{s}) (-1)^{\frac{(\xi, \xi + c_1(\mathfrak{s}))}{2}} e^{(c_1(\mathfrak{s}), \alpha)}.$$

Example 0.20. Let X be a quintic surface in \mathbb{P}^3 . The Donaldson series are

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^0(\alpha) &= 8e^{\frac{(\alpha^2)}{2}} \frac{e^{(K_X, \alpha)} - e^{-(K_X, \alpha)}}{2}, \\ \mathcal{D}^{K_X}(\alpha) &= -8e^{\frac{(\alpha^2)}{2}} \frac{e^{(K_X, \alpha)} + e^{-(K_X, \alpha)}}{2}. \end{aligned}$$

We have $\chi_h = 5$, $(K_X^2) = 5$. The Seiberg-Witten classes are $\pm K_X$, and

$$\text{SW}(-K_X) = 1, \quad \text{SW}(K_X) = (-1)^{\chi_h} = -1.$$

Hence

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^0(\alpha) &= (-1)^{\chi(\mathcal{O}_X)} 2^{(K_X^2) - \chi(\mathcal{O}_X) + 1} \left(\text{SW}(K_X) e^{\frac{1}{2}(\alpha^2)z^2 + (K_X, \alpha)z} \right. \\ &\quad \left. + \text{SW}(-K_X) e^{\frac{1}{2}(\alpha^2)z^2 - (K_X, \alpha)z} \right) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{K_X}(\alpha) &= (-1)^{(K_X^2) + \chi(\mathcal{O}_X)} 2^{(K_X^2) - \chi(\mathcal{O}_X) + 1} \left(\text{SW}(K_X) (-1)^{(K_X^2)} e^{\frac{1}{2}(\alpha^2)z^2 + (K_X, \alpha)z} \right. \\ &\quad \left. + \text{SW}(-K_X) e^{\frac{1}{2}(\alpha^2)z^2 - (K_X, \alpha)z} \right). \end{aligned}$$

It is also known that Witten's conjecture is compatible with the blow-up formula.

Mochizuki developed a general theory of Donaldson type invariants and studied the wall-crossing behavior under the change of δ . In particular, he showed that $D_{\text{Moc}}^{\xi,n}$ is an integral over the configuration spaces of points (=products of Hilbert schemes of points) of cohomology classes related to

- the SW-invariants (global contribution) and
- the configuration of points (local contribution).

This is a very complicated expression, but is a very strong result, since the remaining problem is just a combinatorial one.

We developed a technique to compute this kind of integral. So we get the following.

Theorem 0.21 (Göttsche, Nakajima, Yoshioka). *Assume that X has a structure of complex projective surface and ξ is of type $(1, 1)$.*

(1) *We set*

$$\mathcal{D}_{\text{Moc}}^{\xi}(\alpha) := \sum_n D_{\text{Moc}}^{\xi,n}(e^{\alpha}(1 + \frac{1}{2}p)).$$

Then

$$\mathcal{D}_{\text{Moc}}^{\xi}(\alpha) = 2^{(K_X^2) - \chi_h(X) + 2} (-1)^{\chi_h(X)} e^{\frac{(\alpha^2)}{2}} \sum_{\mathfrak{s}} \text{SW}(\mathfrak{s}) (-1)^{\frac{(\xi, \xi + c_1(\mathfrak{s}))}{2}} e^{(c_1(\mathfrak{s}), \alpha)}.$$

(2) *Witten's conjecture is true, if X has a structure of complex projective surface and ξ is of type $(1, 1)$.*

(1) implies that the blow-up formula (0.14) holds for Mochizuki's invariant. Then the second claim is a consequence of (1) and Proposition 0.16.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, KOBE UNIVERSITY, KOBE, 657, JAPAN
E-mail address: yoshioka@math.kobe-u.ac.jp

コンパクトな群作用を持つCAT(0)空間 に対する固定点性質

豊田 哲 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

1 はじめに

群の距離空間 Y への作用の在り方を捉える上で、次の対極的な二つの性質は基本的である：

- (1) 与えられた群は、 Y へコンパクトかつ固有不連続に等長作用をする。
- (2) 与えられた群のいかなる Y への等長作用も固定点を持つ。

群が上の性質 (2) を満足するとき、 Y に対する**固定点性質**を持つといわれる。離散群の研究において、与えられた群がどのような空間にどのように作用をするのかを調べることは基本的な手段であるが、特に、最近では、非正曲率リーマン多様体を一般化したCAT(0)空間と呼ばれる距離空間に対する等長作用を調べることで多くの成果が上がってきている。本稿では、 Y が測地的完備かつ完備なCAT(0)空間であるときには、 Y に対して性質 (1) を満たすような群が少なくとも一つ存在するならば、性質 (2) を満たすような無限群も大量に存在することを報告する。

2 CAT(0)空間の不変量 δ とその評価

ヒルベルト空間はCAT(0)空間の典型的な例であるが、ヒルベルト空間に対する離散群の作用については、古くから広く研究がなされており、それらを一般のCAT(0)空間へ拡張することが近年多く試みられている。そのような試みの一つとして、井関・納谷・近藤らは、CAT(0)空間のヒルベルト空間からのズレを、0以上1以下に値を取る次に定義を述べるような不変量 δ で表して、その値がそれ程大きくなならないCAT(0)空間に対しては、ヒルベルト空間に対する幾つかの議論がうまく働くことを証明した ([3], [4], [5])。

定義 1 (井関-納谷 [3]) 完備CAT(0)空間 Y に対し、

$$\delta(\mu) = \sup_{\mu} \inf_{\phi: \text{supp}(\mu) \rightarrow \mathcal{H}} \frac{\|\int_Y \phi(y)\mu(dy)\|^2}{\int_Y \|\phi(y)\|^2 \mu(dy)}$$

と定める．ただし， μ は台 $\text{supp}(\mu)$ が二点以上を含む有限集合であるような確率測度全体を動き， ϕ はヒルベルト空間に値を持つ $\text{supp}(\mu)$ 上の 1 -Lipschitz 写像で $\|\phi(y)\| = d_Y(y, \text{bar}(\mu))$ ($\forall y \in \text{supp}(\mu)$) を満足するもの全体を動く．ここで， $\text{bar}(\mu)$ は確率測度 μ の重心を表している．

しかし，彼らによる研究の一つの障害は，この不変量の計算・評価が困難なことであり，それが「それ程大きくない」というのがどのような場合なのかよく分からないことであった．講演者はこの状況の改善を試み，[9]において， δ が上から抑えられるための幾何学的な十分条件を与えた¹：

定理 2 ([9]) Y を完備 CAT(0) 空間とする．Gromov-Hausdorff プレコンパクトな距離空間の族 $\{X_\alpha\}_\alpha$ が存在して， Y 上の任意の点 $p \in Y$ における接錐 $TC_p Y$ が， $\{X_\alpha\}_\alpha$ に属する空間上の距離錐の（有限個もしくは無限個の）直積 $\text{Cone}(X_{\alpha_1}) \times \text{Cone}(X_{\alpha_2}) \times \dots$ と等長的であるならば，

$$\delta(Y) < 1$$

が成立する．特に，完備 CAT(0) 空間 Y の方向空間全体のなす族 $\{S_p Y\}_{p \in Y}$ が Gromov-Hausdorff プレコンパクトであるならば， $\delta(Y) < 1$ である．

ここで，接錐という言葉が出てきたが，CAT(0) 空間 Y においては，多様体における接空間に相当するものとして ($p \in Y$ における) 接錐 $TC_p Y$ を考えることができる．また，単位接空間に相当するものとして方向空間 $S_p Y$ が定義される．これらの用語の正確な定義は，[1]などを参照されたい．

本稿では，次の二つの意味のある CAT(0) 空間のクラスが定理 2 の条件を満足していることを報告する：

定理 3 ([10]) Y を完備かつ測地的完備な CAT(0) 空間とすると， Y に固有不連続かつコンパクトに作用するような群が存在するならば， $\delta(Y) < 1$ である．

定理 4 ([10]) N を正の整数とする．完備 CAT(0) 空間 Y が同一の *doubling* 定数 N を持つ（有限個ないし無限個の）*doubling* な距離空間の直積と等長であるならば， N のみに依存する定数 $0 < C < 1$ が存在して

$$\delta(Y) \leq C.$$

が成り立つ．

定理 3 が興味深いのは，次のような一般的な結果と併せると，冒頭に述べたようなことを導くからである．

¹この定理は，より一般的な形で述べることができる ([9], [10] 参照)．

定理 5 (井関-近藤-納谷 [5]) Y を $\delta(Y) < 1$ であるような完備 CAT(0) 空間とし, L を非有界な正整数の集合とする. このとき, 下に述べる (i) から (iv) の条件を満足するような有限グラフの列 $\{G_l\}_{l \in L}$ に付随するグラフモデルのランダム群は Y に対して固定点性質を持ち, かつ非初等的な双曲群である.

- (i) G_l の頂点数は $+\infty$ に発散する;
- (ii) 正の整数 d が存在して, 任意のグラフ G_l の任意の頂点に隣接する頂点数は 2 以上 d 以下である.
- (iii) 定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在して, 各 $l \in L$ に対してグラフ G_l の *girth* (最小サイクルの長さ) は $c_1 l$ を下回らず, グラフ G_l の直径は $c_2 l$ を超えない;
- (iv) 正の実数 μ_0 が存在して任意のグラフ G_l の組み合わせラプラス作用素の最小正固有値 $\lambda_1(G_l)$ は μ_0 以上である.
- (v) ある定数 $c_3 > 0$ と 1 に十分近い $1 < \beta$ が存在して, 各グラフ G_l に埋め込まれた長さ $\frac{l}{2}$ 未満の *path* の個数は $c_3 \cdot \beta^{\frac{l}{2}}$ 未満である.

グラフ列に付随するランダム群の定義については, 紙数を超えてしまうのでここでは述べないが, [5] やそこにある参考文献を参照されたい. 「ランダム群が性質...を持つ」という主張が意味することを, ごく大雑把に表現するとすれば, 「性質...を持つ (多くの) 群の存在が, 確率論的に保証される」といった所であろうか. 定理 3 と定理 5 を併せると次が得られる:

系 6 Y を完備かつ測地的完備な CAT(0) 空間とし, ある群が存在して Y に固有不連続かつコンパクトに等長作用しているとする. また, L を非有界な正整数の集合とする. このとき, 定理 5 中の (i) から (iv) の条件を満足するような有限グラフの列 $\{G_l\}_{l \in L}$ に付随するグラフモデルのランダム群は Y に対して固定点性質を持ち, かつ非初等的な双曲群である.

3 主定理の証明の概要

この節では, 定理 3 の証明の概要を述べる.

まず, 距離空間に固有不連続かつコンパクトな群作用があるときは, 十分小さな半径 r を持つ球の形状は, 次の補題で述べるような意味で, 空間上どの点を中心とするものもそんなに他から懸け離れた形をしていないということに注意する:

補題 7 Y が固有不連続かつコンパクトな等長的な群作用を許容するような距離空間であるならば, ある正の実数 $r > 0$ に対して, Y 上の半径 r の球全体のなす族 $\{B(p, r)\}_{p \in Y}$ は *Gromov-Hausdorff* プレコンパクトである.

距離空間 Y 上の曲線 $\gamma : [a, b] \rightarrow Y$ が閉区間 $[a, b]$ の Y への等長写像であるとき、測地線と呼ぶ。 Y が $CAT(0)$ 空間であるとき、 Y が測地的完備であるとは、任意の測地線 $\gamma : [a, b] \rightarrow Y$ が \mathbb{R} 上定義された測地線 $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow Y$ に拡張できることである。

測地的完備な $CAT(0)$ 空間では、空間の多くの局所的な性質が、接錐及び方向空間に自然な形で遺伝される。例えば、次が成り立つことを示すことができる：

補題 8 Y を完備かつ測地的完備な $CAT(0)$ 空間とする。ある正実数 $r > 0$ に対して、 Y 上の半径 r の球全体のなす族 $\{B(p, r)\}_{p \in Y}$ が Gromov-Hausdorff プレコンパクトであるならば、方向空間全体のなす族 $\{S_p Y\}_{p \in Y}$ も Gromov-Hausdorff プレコンパクトである。

定理 3 は、補題 7 と補題 8 及び定理 2 から得られる。

注意 9 定理 3 の仮定において、測地的完備性は外せないことを注意しておく。最近、神戸大学の近藤氏 ([6]) は $CAT(0)$ 空間の構造を持つ錐の列 T_1, T_2, T_3, \dots で、 $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta(T_i) = 1$ なるものを構成し、不変量 δ の値が 1 になるような空間の存在を初めて証明した。ここで、 $T'_i \subset T_i$ を各錐の原点を中心とする半径 $\frac{1}{i}$ の球とするとするとき、 T'_1, T'_2, \dots をそれぞれの原点を全て同一視することで一点で張り合わせて得られる空間 T' を考えると、測地的完備ではないが、 $\delta(T') = 1$ を満足するコンパクトな $CAT(0)$ 空間が得られる。

4 超極限と doubling 条件

距離空間 Y が doubling 条件を満足するとは、正整数 N が存在して、 Y 上のすべての閉球が高々 N 個の半径が半分の閉球で覆うことができることをいう。また、このような N のことを Y の doubling 定数という。

もしも、測地的完備性を仮定するならば、定理 4 は定理 3 と殆ど同様な方法で証明することができる。測地的完備性を仮定せずに前節の補題 8 に相当することを示すために、ここでは、距離空間列の超極限 (ultralimit) という概念を利用する。距離空間列の超極限の定義については、[7] や [9] を参照されたい。証明の鍵となるのは、「共通の doubling 定数 N に関して doubling 条件を満たす孤長空間の列の超極限は、同じ定数に関して doubling 条件を満足する」という次の事実である²

命題 10 ω を集合 I 上のウルトラフィルターとする。 $\{(X_i, d_i)\}_{i \in I}$ を孤長空間の列とする。もしも、各 (X_i, d_i) が同一の定数 N を doubling 定数として doubling 条件を満足するのであれば、 ω -極限 $\omega\text{-}\lim_i (X_i, d_i)$ も N を doubling 定数として doubling 条件を満足する。

²おそらく、この事実は専門家にとっては既知なものだと思われるが、それについて言及している文献等を講演者は知らない。講演者の [9] では、この事実について詳細な証明を与えてある。

CAT(0) 空間 Y の点 p における接錐 $TC_p Y$ について本稿では正確な定義を与えていないが、直観的な言い方をすると、 p を出発する測地線の集まりと考える定義の仕方や、 p を基点として、距離空間 Y の距離のスケールをどんどん大きくしていった先の超極限と考える定義の仕方がある（これらの定義は同値ではないが、後者の定義による接錐には、前者の定義によるものが等長的に埋め込まれる）。後者の定義の仕方に注目することで、命題 10 から次が導かれる：

系 11 Y を CAT(0) 空間とする。 Y が *doubling* 定数を N として *doubling* 条件を満たしているとする、 Y の任意の接錐 $TC_p Y$ も同じ定数に関して *doubling* 条件を満たす。

CAT(0) 空間 Y の全ての接空間 $TC_p Y$ が同じ *doubling* 定数に関して *doubling* 条件を満たすときは、 Y が定理 2 の仮定の条件を満たすことを示すことは難しくないので、定理 4 が、系 11 と定理 2 から得られる。

参考文献

- [1] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [2] D. Burago, Y. Burago and S. Ivanov, *A course in metric geometry*, Graduate studies in Math. 33 AMS, Providence, RI, 2001.
- [3] H. Izeki and S. Nayatani, *Combinatorial harmonic maps and discrete-group actions on Hadamard spaces*, *Geom. Dedicata* **114** (2005) 147–188.
- [4] H. Izeki, T. Kondo, S. Nayatani, *Fixed-point property of random groups*, *Ann. Global Anal. Geom.* **35** (2009), 363–379.
- [5] H. Izeki, T. Kondo, S. Nayatani, *N -step energy of maps and fixed-point property of random groups* preprint.
- [6] T. Kondo, CAT(0) spaces with $\delta = 1$, preprint.
- [7] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, 31. AMS, Providence, RI, 2003.
- [8] T. Toyoda, *Continuity of a certain invariant of a measure on a CAT(0) space*, *Nihonkai Math. J.* **20** (2009), 89–97.
- [9] T. Toyoda, *CAT(0) spaces on which certain type of singularity is bounded*, to appear in *Kodai Math. J.*
- [10] T. Toyoda, *Fixed point property for a geodesically complete cocompact CAT(0) space*, preprint.

狭義凸 Banach 空間へのアフィン等長作用の 固定点の存在について

田中 守 (Mamoru Tanaka)* 東北大学 (Tohoku University)

序

有限生成群が性質 (FH) を持つとは, 無限次元 Hilbert 空間への任意のアフィン等長作用が固定点を持つことである. 有限生成群が性質 (FH) を持つことは, Kazhdan の性質 (T) (定義 1 参照) を持つことと同値であることが知られている. これらの性質は, 多くの分野で研究対象とされている.

最近では, これらの性質が Banach 空間に一般化され, 研究されている. たとえば, Kazhdan の性質 (T) を Banach 空間 B に拡張した性質を性質 (T_B) とい (定義 1 参照), 無限次元 L^p 空間 $L^p(1 \leq p < \infty)$ に対して, 有限生成群が性質 (T_{L^p}) を持つことは互いに同値であることが示されている ([BFGM]).

一方, 有限生成群が性質 (F_B) を持つとは, Banach 空間 B への任意のアフィン等長作用が固定点を持つことである. 有限生成群が性質 (F_{L^p}) を持つことは, すべての $p \in [1, 2]$ で同値である ([CDH], ただし $p = 1$ のときは性質 (F_{L^p}) の定義が少し異なる). しかし, 性質 $(F_{L^2}) (= \text{性質 } (FH))$ を持つが, 十分大きな $p > 2$ に対して性質 (F_{L^p}) を持たない有限生成群の存在が知られている. そのため, 一般には性質 (T_B) と性質 (F_B) は異なる性質である.

本講演では, B を狭義凸実 Banach 空間とし, 性質 (T_B) , 性質 (F_B) に関連するある条件を有限生成群が満たすための同値条件を与える. そして, この結果を ℓ^p 空間 $(1 < p < \infty)$ に適用し, 有限生成群上のラプラシアンの特値とこれらの条件との関係を与える.

1 狭義凸実 Banach 空間への等長作用

Γ を有限生成群とし, K をその有限生成元集合とする. ただし, $\gamma \in K$ ならば $\gamma^{-1} \in K$ であると仮定する. B を Banach 空間とし, $\pi : \Gamma \times B \rightarrow B$ を Γ の B への線形等長作用とする. 作用 π の固定ベクトルからなる閉部分空間を $B^{\pi(\Gamma)}$ と書き, $B' := B/B^{\pi(\Gamma)}$ とする. このとき, π から自然に線形等長作用 $\pi' : \Gamma \times B' \rightarrow B'$ が誘導される.

定義 1. 有限生成群 Γ が性質 (T_B) を持つとは, 正定数 C が存在して, 任意の線形等長作用 $\pi : \Gamma \times B \rightarrow B$ に対し, 任意の $v' \in B'$ が $\max_{\gamma \in K} \|\pi'(\gamma, v') - v'\| \geq C\|v'\|$ を満たすことである. 特に, B が無限次元 Hilbert 空間のとき, Kazhdan の性質 (T) を持つという.

*sa5m10@math.tohoku.ac.jp

以下, B を狭義凸 Banach 空間, つまり任意の異なる単位ベクトル $u, v \in B$ が $\|u + v\| < 2$ を満たす Banach 空間とする. 例えば, L^p 空間 ($1 < p < \infty$) は狭義凸 Banach 空間である.

写像 $c : \Gamma \rightarrow B$ が π -コサイクルであるとは, 任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ に対して $c(\gamma_1\gamma_2) = \pi(\gamma_1, c(\gamma_2)) + c(\gamma_1)$ が成り立つことである. また, Γ の B への等長作用 $\alpha : \Gamma \times B \rightarrow B$ がアフィンであるとは, Γ の B へのある線形等長作用 ρ とある ρ -コサイクル c により, 任意の $v \in B$ と $\gamma \in \Gamma$ に対して $\alpha(\gamma, v) = \rho(\gamma, v) + c(\gamma)$ と書けることである. この ρ を α の線形部分, c をコサイクル部分と呼ぶ. 線形部分が π のアフィン等長作用からなる集合を $\mathcal{A}(\pi)$ と表す. 特に, $\pi \in \mathcal{A}(\pi)$ である.

α を Γ の B へのアフィン等長作用とし, $1 \leq r < \infty$ とする. ベクトル $v \in B$ に対して

$$F_{\alpha,r}(v) := \left(\sum_{\gamma \in K} \frac{\|\alpha(\gamma, v) - v\|^r}{|K|} \right)^{1/r}, \quad F_{\alpha,\infty}(v) := \max_{\gamma \in K} \|\alpha(\gamma, v) - v\|$$

と定義する. このとき v が α の固定点であることと, $F_{\alpha,r}(v) = 0$ は同値である. また,

$$|\nabla_- F_{\alpha,r}|(v) := \max \left\{ \limsup_{u \rightarrow v, u \in B} \frac{F_{\alpha,r}(v) - F_{\alpha,r}(u)}{\|v - u\|}, 0 \right\}$$

と定義する. 関数 $|\nabla_- F_{\alpha,r}|$ は, $F_{\alpha,r}$ が最も減る方向への勾配のノルムとみなせる.

定理 1. π を Γ の B への線形等長作用とし, $1 \leq r \leq \infty$ とする. 線形等長作用 π は非自明な固定ベクトルを持たないと仮定する. このとき以下は同値.

- (i) 正定数 C が存在し, 任意の $v \in B$ が $\max_{\gamma \in K} \|\pi(\gamma, v) - v\| \geq C\|v\|$ を満たす.
- (ii) 正定数 C' が存在し, 任意の $v \in B \setminus \{0\}$ が $|\nabla_- F_{\pi,r}|(v) \geq C'$ を満たす.

定理 1 の (i) は, 性質 (T_B) の線形等長作用 π' に対する条件そのものである.

定理 2 ([Tan]). π を Γ の B への線形等長作用とし, $1 \leq r \leq \infty$ とする. 線形等長作用 π は非自明な固定ベクトルを持たないと仮定する. このとき以下は同値.

- (i) 任意の $\alpha \in \mathcal{A}(\pi)$ が固定点を持つ.
- (ii) 正定数 C' が存在し, 任意の $\alpha \in \mathcal{A}(\pi)$ に対して, $F_{\alpha,r}(v) > 0$ である任意の $v \in B$ が $|\nabla_- F_{\alpha,r}|(v) \geq C'$ を満たす.

これらの定理を有限生成群 Γ 上の ℓ^p 空間と, その上の正則表現に適用すると, 定理 1 の (i), 定理 2 の (i) と Γ 上の”ラプラシアン”のスペクトルとの関係が見えてくる.

2 定理の ℓ^p 空間への適用

前の節と同様に, Γ を有限生成群とし, K をその有限生成元集合とする. さらに, $1 < p < \infty$ とし, $\gamma \in K$ ならば $\gamma^{-1} \in K$ であると仮定する. Lebesgue 空間 $\ell^p(\Gamma)$ とは, 空間が $\{f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \mid \sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p < \infty\}$ であり, ノルムが $\|f\|_{\ell^p(\Gamma)} := (\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p)^{1/p}$ の Banach 空間である.

群 Γ 上の実数値関数からなる空間を $\mathcal{F}(\Gamma)$ と表す. 群 Γ の $\mathcal{F}(\Gamma)$ 上の左正則表現 λ_Γ を, $f \in \mathcal{F}(\Gamma)$ と $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ に対して $\lambda_\Gamma(\gamma)f(\gamma') = f(\gamma^{-1}\gamma')$ と定義する. この表現 λ_Γ の $\ell^p(\Gamma) (\subset \mathcal{F}(\Gamma))$ への制限を $\lambda_{\Gamma,p}$ と表す. 表現 $\lambda_{\Gamma,p}$ は, 非自明な固定ベクトルを持たない Γ の $\ell^p(\Gamma)$ への線形等長作用とみなせる.

関数 $f \in \mathcal{F}(\Gamma)$ に対して, $df(\gamma) := \lambda_\Gamma(\gamma)f - f$ と定義する. 関数 $f \in \mathcal{F}(\Gamma)$ が p -Dirichlet 有限であるとは, すべての $\gamma \in K$ で $df(\gamma) \in \ell^p(\Gamma)$ が成り立つことである. すべての p -Dirichlet 有限関数からなる空間を $D_p(\Gamma)$ と表す. 空間 $\ell^p(\Gamma)$ は $D_p(\Gamma)$ の線形部分空間である. 空間 $D_p(\Gamma)$ には, $\|f\|_{D_p(\Gamma)} := (\sum_{\gamma \in K} \|df(\gamma)\|_{\ell^p(\Gamma)}^p / |K|)^{1/p}$ でセミノルムを定めることができる.

関数 $f \in D_p(\Gamma)$ の p -ラプラシアン $\Delta_p f$ を,

$$\Delta_p f(x) := \sum_{\gamma \in K} \frac{|df(\gamma)(x)|^{p-2} df(\gamma)(x)}{|K|}$$

と定義する. 但し, $p < 2$ のとき, $df(\gamma)(x) = 0$ ならば $|df(\gamma)(x)|^{p-2} = 0$ とする. 任意の $f \in D_p(\Gamma)$ に対して, df は $\lambda_{\Gamma,p}$ -コサイクルである. 逆に, Puls [Pul06] による結果から, 任意の $\alpha \in \mathcal{A}(\lambda_{\Gamma,p})$ に対して, そのコサイクル部分が df_α となる $f_\alpha \in D_p(\Gamma)$ が, 定数除を除いて一意に存在することが分かる. 特に $f_{\lambda_{\Gamma,p}} \equiv 0$ とできる. これらの事実と計算から, $F_{\alpha,p}(f) > 0$ を満たす任意の $f \in \ell^p(\Gamma)$ に対して,

$$|\nabla_{-F_{\alpha,p}}|(f) = \frac{2\|\Delta_p(f - f_\alpha)\|_{\ell^q(\Gamma)}}{\|f - f_\alpha\|_{D_p(\Gamma)}^{p-1}}$$

が成り立つことが分かる. 但し, q は p の共役指数, つまり $q = p/(p-1)$ である. 定理 1 に, この結果を用いると, 次の系が導かれる.

系 1. 以下は同値.

- (i) 正定数 C が存在し, 任意の $f \in \ell^p(\Gamma)$ が $\max_{\gamma \in K} \|\lambda_{\Gamma,p}(\gamma)f - f\|_{\ell^p(\Gamma)} \geq C\|f\|_{\ell^p(\Gamma)}$ を満たす.
- (ii) 正定数 C' が存在し, 任意の $f \in \ell^p(\Gamma)$ が $\|\Delta_p f\|_{\ell^q(\Gamma)} \geq C'\|f\|_{D_p(\Gamma)}^{p-1}$ を満たす. 但し, q は p の共役指数である.

ここで, $g \in \ell^q(\Gamma)$ と $f \in \ell^p(\Gamma)$ に対し, $\langle g, h \rangle := \sum_{\gamma \in \Gamma} g(\gamma)f(\gamma)$ とする. このとき, 正定数 C が存在し, 任意の $f \in \ell^p(\Gamma)$ が $\langle \Delta_p f, f \rangle \geq C\|f\|_{\ell^p(\Gamma)}^p$ を満たすな

らば, 系 1 の (i) が成り立つ. 一方,

$$\|f\|_{D_p(\Gamma)} = F_{(\lambda_{\Gamma,p},p)}(f) \geq \max_{\gamma \in K} \|\lambda_{\Gamma,p}(\gamma)f - f\|_{\ell^p(\Gamma)} / |K|^{1/p}$$

である. よって, この系の (i), (ii) のいずれかが成り立つならば, 正定数 C'' が存在し, 任意の $f \in \ell^p(\Gamma)$ が $\|\Delta_p f\|_{\ell^q(\Gamma)} \geq C'' \|f\|_{\ell^p(\Gamma)}^{p-1}$ を満たす. 特に $p = 2$ のとき, これらはいずれも Δ_2 のスペクトルが下から評価できることを表している.

一方, 定理 2 に対しては, 次が成り立つ.

系 2 ([Tan]). 以下は同値.

(i) 任意の $\alpha \in \mathcal{A}(\lambda_{\Gamma,p})$ が固定点を持つ.

(ii) 正定数 C' が存在し, 任意の $f \in D_p(\Gamma)$ が $\|\Delta_p f\|_{\ell^q(\Gamma)} \geq C' \|f\|_{D_p(\Gamma)}^{p-1}$ を満たす. 但し, q は p の共役指数である.

特に $p = 2$ のとき, この系の (ii) は, $D_2(\Gamma)$ の内積に関する Δ_2 のスペクトルの下からの評価を表している.

参考文献

- [BFGM] Bader, U., Furman, A., Gelander, T., Monod, N.: Property (T) and rigidity for actions on Banach spaces. *Acta Math.* 198, 57–105 (2007)
- [CDH] I. Chatterji, C. Druţu, and F. Haglund, *Kazhdan and Haagerup properties from the median viewpoint*, to appear in *Adv. of Math.*.
- [Pul06] M.J. Puls, *The first L^p -cohomology of some finitely generated groups and p -harmonic functions*, *J. Funct. Anal.* **237** (2006), no. 2, 391–401.
- [Tan] M. Tanaka, *Existence of a fixed point of an isometric action on a global Busemann nonpositive curvature space*, preprint.
- [Yu05] G. Yu, *Hyperbolic groups admit proper affine isometric actions on ℓ^p -spaces*, *Geom. Funct. Anal.* **15** (2005), 1144–1151.

Minkowski 空間の向き付け不可能な極大曲面について

藤森 祥一 (福岡教育大学)

1 極大面

本講演は, Francisco J. López 氏 (グラナダ大学) との共同研究 [4] に基づく.

\mathbb{L}^3 を $(+, +, -)$ 型の 3 次元 Minkowski 空間とする. \mathbb{L}^3 内の空間的曲面で, 平均曲率が恒等的に消えているものを**極大曲面**という. 完備な極大曲面は平面に限られることが知られている ([1]) が, ある種の特異点を許容しその上で改めて完備性を定めることで, 完備な例が豊富に存在し大域的に興味深い性質を持つことが分かってきている ([2, 3, 9]).

極大曲面は, 3 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^3 内の極小曲面と類似の表現公式をもつ. すなわち, M を Riemann 面, g を M 上の有理型関数, ϕ を M 上の正則 1 形式で, $(|g|^{-1} + |g|)^2 |\phi|^2$ が M 上の正定値計量を定め, かつ $|g|$ は恒等的には 1 にならないものとする. このとき,

$$X = \operatorname{Re} \int \left(\frac{i}{2} \left(\frac{1}{g} - g \right), \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} + g \right), 1 \right) \phi : M \longrightarrow \mathbb{L}^3 \quad (1)$$

は特異点をもつ極大曲面になる ([5]).

このような曲面を**極大面**と呼ぶ ([9]). (g, ϕ) を X の Weierstrass data, g を X の Gauss 写像という. X による M への誘導計量は $ds^2 = (|g|^{-1} - |g|)^2 |\phi|^2 / 4$ で与えられる. 従って, X の特異点集合は $\{p \in M; |g(p)| = 1\}$ となる. \mathbb{R}^3 の極小曲面と \mathbb{L}^3 の極大面とは局所的に類似の性質を多く持つが, 大域的には様々な違いが生ずる. 例えば [6] では, 極小曲面にはない極大面独自の例が構成されている.

定義 1 ([9]). $X : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ を極大面, ds^2 を X による M への誘導計量とする. M 上のコンパクトな台をもつ対称 $(0, 2)$ テンソル場 T が存在して $ds^2 + T$ が M の完備な Riemann 計量になるとき, X を**完備な極大面**と呼ぶ.

$X : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ を完備な極大面, (g, ϕ) をその Weierstrass data とする. このときあるコンパクト Riemann 面 \overline{M} と有限個の点 $p_1, \dots, p_n \in \overline{M}$ が存在して, M は $\overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\}$ と双正則になる ([9]). p_1, \dots, p_n は X の**エンド**に対応する (コンパクトな極大面は存在しない). さらに, g と ϕ は \overline{M} に有理型に拡張される.

本講演の目的は向き付け不可能な極大面の考察である.

定義 2. M' を向き付け不可能な曲面とする. $X' : M' \rightarrow \mathbb{L}^3$ が**向き付け不可能な極大面**であるとは, Riemann 面 M と二重被覆 $\pi : M \rightarrow M'$ が存在して, $X = X' \circ \pi : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ が極大面になることである. さらに X が完備のとき, X' は**完備**であるという.

$X' : M' \rightarrow \mathbb{L}^3$ を向き付け不可能な極大面, $\pi : M \rightarrow M'$ を M' の二重被覆とする. (g, ϕ) を向き付け可能な極大面 $X = X' \circ \pi$ の Weierstrass data とする. $I : M \rightarrow M$ を π に関する反正則デッキ変換とすると, M の各点 p に対して $X \circ I(p) = X(p)$ が成り立つ. これは

$$g \circ I = \frac{1}{\bar{g}} \quad \text{かつ} \quad I^* \phi = \bar{\phi}. \quad (2)$$

が成り立つことと同値である.

2 Gauss 写像

定義 3. $X' : M' \rightarrow \mathbb{L}^3$ を向き付け不可能な極大面, $\pi : M \rightarrow M'$ を M' の二重被覆とする. g を向き付け可能な極大面 $X = X' \circ \pi$ の Gauss 写像とする. $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の変換 $A : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を $A(z) = 1/\bar{z}$ で定める. また, $p_0 : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow (\mathbb{C} \cup \{\infty\})/\langle A \rangle$ を自然な射影とする. このとき,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow p_0 \\ M' & \xrightarrow{\hat{g}} & (\mathbb{C} \cup \{\infty\})/\langle A \rangle \end{array}$$

が可換となる共形写像 $\hat{g} = M' \rightarrow (\mathbb{C} \cup \{\infty\})/\langle A \rangle$ が一意に存在する. この \hat{g} を X' の Gauss 写像と呼ぶ.

向き付け不可能な極大面 $X' : M' \rightarrow \mathbb{L}^3$ が完備ならば, \hat{g} は M' の各エンドに共形的に拡張される. さらに \hat{g} の写像度は $g : \overline{M} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の写像度と等しくなる.

3 主結果

向き付け不可能な完備極大面の Gauss 写像に関して, 次の結果を得た.

定理 4 ([4]). $X' : M' \rightarrow \mathbb{L}^3$ を向き付け不可能な完備極大面, $\hat{g} : M' \rightarrow (\mathbb{C} \cup \{\infty\})/\langle A \rangle$ を X' の Gauss 写像とする. このとき, \hat{g} の写像度は 4 以上の偶数になる.

注意 5. \mathbb{R}^3 の向き付け不可能な完備極小曲面の場合は, \hat{g} の写像度と M' のコンパクト化の Euler 数との偶奇が等しくなることが知られている ([7]).

定理を示すために, 次の 2 つの事実を用いる.

事実 6 ([7]). M_1, M_2 を境界のないコンパクト 2 次元多様体とし, $p : M_1 \rightarrow M_2$ を分岐被覆とする. $\chi(M_2)$ が奇数ならば, $\chi(M_1) \equiv \deg p \pmod{2}$ が成り立つ.

事実 7 ([8]). \overline{M} をコンパクト Riemann 面, $I : \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ を固定点のない反正則対合とする. このとき, \overline{M} 上の有理型関数 h で $h \circ I = -1/\bar{h}$ をみたすものが存在する.

定理の証明の概略. $\pi : M \rightarrow M'$ を M' の二重被覆, $I : M \rightarrow M$ を π に関する反正則デッキ変換, g を向き付け可能な極大面 $X = X' \circ \pi$ の Gauss 写像とする. M のコンパクト化を \bar{M} で表す. 事実 7 により $h \circ I = -1/\bar{h}$ をみたす \bar{M} 上の有理型関数 h が存在する. そのような h を 1 つとる. 必要ならば Möbius 変換 $L(z) = (z+a)/(\bar{a}z-1)$ との合成を考えることにより, h は g の零や極で零も極ももたないと仮定できる. そこで \bar{M} 上の有理型関数 G を $G(p) = g(p)h(p)$ ($p \in \bar{M}$) で定めると,

$$G \circ I = (gh) \circ I = (g \circ I)(h \circ I) = (1/\bar{g})(-1/\bar{h}) = -1/\bar{G}$$

であるから, 事実 6 により

$$\chi(\bar{M}') \equiv \deg h \pmod{2}, \quad \chi(\bar{M}') \equiv \deg G \pmod{2}$$

が成り立つ. $\deg G = \deg(gh) = \deg h + \deg g$ であるから

$$\deg h \equiv \deg h + \deg g \pmod{2}.$$

よって $\deg \hat{g} = \deg g$ は偶数になる. さらに $\deg \hat{g} = 2$ の例が存在しないことも示すことができる. \square

4 例

\hat{g} の写像度が 4 で, M' が Möbius の帯または Klein の壺から 1 点を除いたものとき, 我々は極大面の構成と分類を行った.

例 8 (Möbius の帯). $M = \mathbb{C} - \{0\}$, $I(z) = -1/\bar{z}$ とする.

(i) Weierstrass data (g, ϕ) を

$$g = z^3 \frac{z-1}{z+1}, \quad \phi = i \frac{z^2-1}{z^2} dz$$

で定めると (1) は M 上 well-defined であり, (g, ϕ) は (2) をみたす. よって $\pi : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{RP}^2 = (\mathbb{C} \cup \{\infty\})/\langle I \rangle$ を自然な射影として $X' : M' = \mathbb{RP}^2 - \{\pi(0)\} \rightarrow \mathbb{L}^3$ を $X = X' \circ \pi$ で定めると, $X' : M' \rightarrow \mathbb{L}^3$ は向き付け不可能な完備極大面を定める (図 1 の左参照).

(ii) Weierstrass data (g, ϕ) を

$$g = z \frac{(rz-1)(sz-1)(tz-1)}{(z+r)(z+\bar{s})(z+\bar{t})},$$

$$\phi = i \frac{(rz-1)(z+r)(sz-1)(z+\bar{s})(tz-1)(z+\bar{t})}{z^4} dz$$

で定める. ただし $r > 0$, $s, t \in \mathbb{C} - \{0\}$ は定数で

$$r^2 + s^2 + t^2 + 4rs + 4st + 4tr = 0$$

かつ

$$(r^2 - 1) \{(|s|^2 - 1)(|t|^2 - 1) - s\bar{t} - \bar{s}t\} = r \{(|s|^2 - 1)(t + \bar{t}) + (|t|^2 - 1)(s + \bar{s})\}$$

をみたすものとする. このとき (1) は M 上 well-defined であり, (g, ϕ) は (2) をみたす. よって (i) と同様に X' を定めるとこれは向き付け不可能な完備極大面を定める (図 1 の右参照).

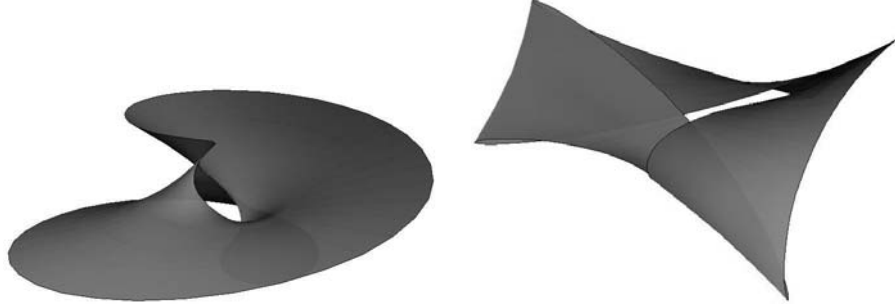


図 1: Möbius の帯型の極大面. 左: 例 8 の (i). 右: 例 8 の (ii) ($r = 1, s = e^{2\pi i/3}, t = e^{-2\pi i/3}$).

定理 9 ([4]). $\deg \hat{g} = 4$ で Möbius の帯型の極大面はこれらの例に限る.

例 10 (Klein の壺 - {1 点}). $r \in \mathbb{R} - \{0\}$ を定数として,

$$\bar{M} = \left\{ (z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2; w^2 = z \frac{rz - 1}{z + r} \right\}$$

とおく. \bar{M} は種数 1 のコンパクト Riemann 面である. $M = \bar{M} - \{(0, 0), (\infty, \infty)\}$ とする. $I: \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ を $I(z, w) = (-1/\bar{z}, -1/\bar{w})$ で定める.

$$g = w \frac{z+1}{z-1}, \quad \phi = i \frac{z^2 - 1}{z^2} dz$$

とすると, (g, ϕ) は (2) をみたし, さらに (1) が M 上 well-defined になるような r が 2 つ存在する. よって $\pi: \bar{M} \rightarrow \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 = \bar{M}/\langle I \rangle$ を自然な射影として $X': M' = (\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2) - \{\pi(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{L}^3$ を $X = X' \circ \pi$ で定めると, $X': M' \rightarrow \mathbb{L}^3$ は向き付け不可能な完備極大面を定める (図 2 参照).

定理 11 ([4]). $\deg \hat{g} = 4$ で 1 つのエンドをもつ Klein の壺型の極大面は, この 2 つに限る.

参考文献

- [1] E. Calabi, *Examples of the Bernstein problem for some nonlinear equations*, Proc. Symp. Pure Math. **15** (1970), 223-230.

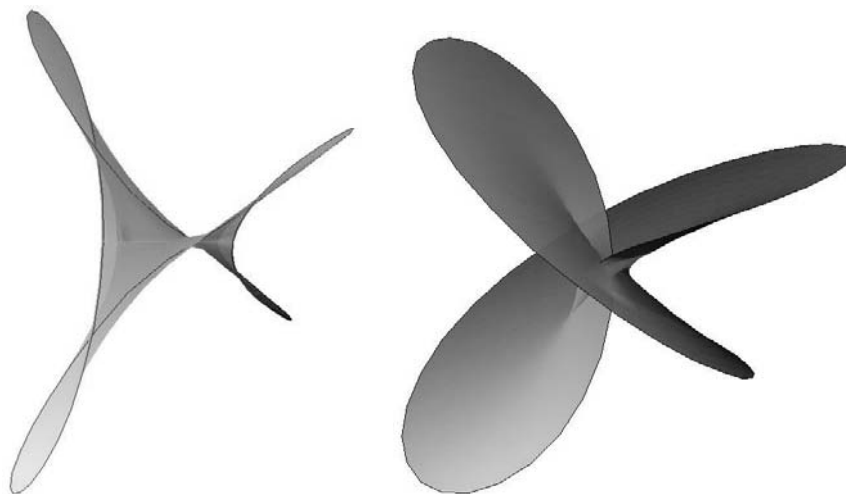


図 2: 1 つのエンドをもつ Klein の壺型の極大面. 左: $r \approx 0.17137$. 右: $r \approx 0.691724$.

- [2] I. Fernández, F. J. López, *Periodic maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski space \mathbb{L}^3* , Math. Z. **256** (2007), 573–601.
- [3] I. Fernández, F. J. López and R. Souam, *The space of complete embedded maximal surfaces with isolated singularities in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space*, Math. Ann. **332** (2005), 605–643.
- [4] S. Fujimori and F. J. López, *Nonorientable maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski 3-space*, to appear in Tohoku Math. J. arXiv:0905.2113.
- [5] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3* , Tokyo J. Math. **6** (1983), 297–309.
- [6] Y. W. Kim and S.-D. Yang, *A family of maximal surfaces in Lorentz-Minkowski three-space*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 3379–3390.
- [7] W. H. Meeks III, *The classification of complete minimal surfaces in R^3 with total curvature greater than -8π* , Duke Math. J. **48** (1981), 523–535.
- [8] M. Ross, *Complete nonorientable minimal surfaces in \mathbf{R}^3* , Comment. Math. Helv. **67** (1992), 64–76.
- [9] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 13–40.

〒 811-4192 福岡県宗像市赤間文教町 1-1, 福岡教育大学 教育学部 数学教育講座
E-mail address: fujimori@fukuoka-edu.ac.jp

可展的な Möbius の帯の漸近的完備化上に現れる特異点

直川耕祐 (大阪大学大学院理学研究科 D1)

本講演では、3次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^3 における可展的な Möbius の帯の漸近方向への延長上に現れる、カस्प辺以外の特異点の個数の下からの評価について報告する。

まず、用語を定義する。 C^∞ -写像 $\gamma = \gamma(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ は、 $\gamma'(s) := d\gamma(s)/ds$ が \mathbb{R} 上消えないとき、**正則曲線**という。正則曲線 $\gamma(s)$ は、 $s \in \mathbb{R}$ において $\gamma(s+l) = \gamma(s)$ を満たすとき、 l -**周期的**であるという。このような γ を固定し、 $\xi = \xi(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ を γ に沿う C^∞ -ベクトル場で、各 $s \in \mathbb{R}$ において $\gamma'(s)$ と一次独立なものとする。 $\xi(s)$ は、 $s \in \mathbb{R}$ において $\xi(s+l) = -\xi(s)$ ($s \in \mathbb{R}$) を満たすとき、 l -**奇周期的**であるという。以下、このような ξ を固定する。十分小さく $\epsilon > 0$ をとると、 C^∞ -写像

$$(1) \quad F(s, u) = \gamma(s) + u\xi(s) \quad (s \in \mathbb{R}, |u| < \epsilon)$$

は \mathbb{R}^3 へのはめ込みを与える。この F のことを、 γ を**生成曲線**、 ξ を**漸近方向**とする **Möbius の帯**という。もし F が平坦 (つまり Gauss 曲率が常に 0) であるならば、 F は**可展的**であるという。

(1) で定義された F に対して、 C^∞ -写像

$$\tilde{F}(s, u) := \gamma(s) + u\xi(s) \quad (s, u \in \mathbb{R})$$

を F の**漸近的完備化**という。図 1 の Möbius の帯の漸近的完備化は、図 2 のようになる。

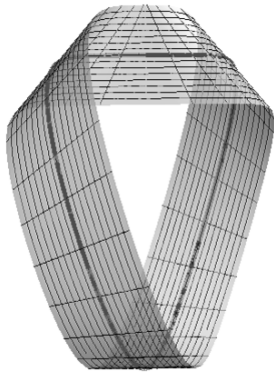


図 1 $F(s, u)$ の像

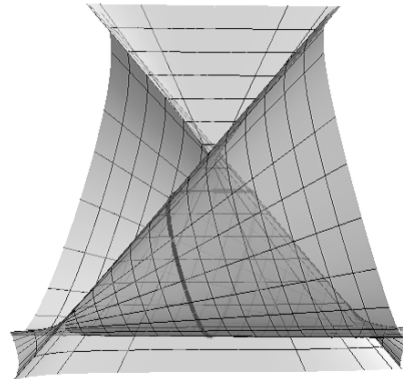


図 2 $F(s, u)$ の漸近的完備化

U を \mathbb{R}^2 の領域とし、 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を C^∞ -写像とする。点 $p \in U$ が f の**特異点**であるとは、 p において f の Jacobi 行列が退化するときをいう。3つの C^∞ -写像

$$f_C(u, v) := \begin{pmatrix} 2u^3 \\ -3u^2 \\ v \end{pmatrix}, \quad f_S(u, v) := \begin{pmatrix} 3u^4 + u^2v \\ -4u^3 - 2uv \\ v \end{pmatrix}, \quad f_{CR}(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v^2 \\ uv^3 \end{pmatrix}$$

は、すべて原点において特異点をもつ (図 3, 4, 5)。 f の特異点 p が**カस्प辺**であるとは、 p のまわりの座標変換と、 $f(p)$ のまわりの \mathbb{R}^3 の座標変換によって、 f が f_C と一致するときをいう。同

様に，このような座標変換で f が f_S と一致するとき**燕の尾**といい， f_{CR} と一致するとき**カスプ状交叉帽子**という．可展面に現れる一般的な特異点は，カスプ辺，燕の尾，カスプ状交叉帽子の3つである．この中で最も一般的に現れる特異点は，カスプ辺である (cf. [6, Proposition 2.16]).

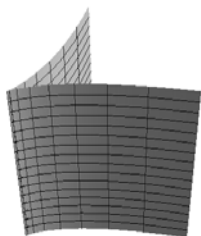


図3 カスプ辺

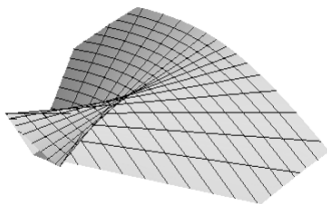


図4 燕の尾

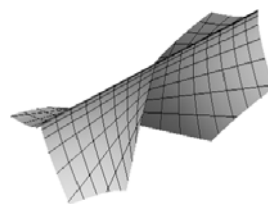


図5 カスプ状交叉帽子

可展的な Möbius の帯は，豊富に存在している．実際，Chicone と Kalton [1] は，ジェネリックに与えられた正則な空間閉曲線に対し，これを生成曲線とするような可展的な Möbius が存在することを示した．また，Røgen [8] は，任意の「位相型」の可展的な Möbius の帯が構成できることを示した．ただし，Möbius の帯の位相型とは，生成曲線のイソトピー型と「捻り数」で決定されるものである．一方，完備かつ平坦な \mathbb{R}^3 にはめ込まれた曲面は，柱面に限ることが知られている．この事実から，可展的な Möbius の帯の漸近的完備化上には，必ず特異点が現れる．そこで，カスプ辺以外の特異点がどの程度現れるのか，その個数の下限について調べ，次のような結果を得た．

命題. 可展的な Möbius の帯の漸近的完備化上には，カスプ辺以外の特異点が少なくとも1つ存在する．

さらに，カスプ辺以外の特異点がちょうど1個である例が存在する (図6)．

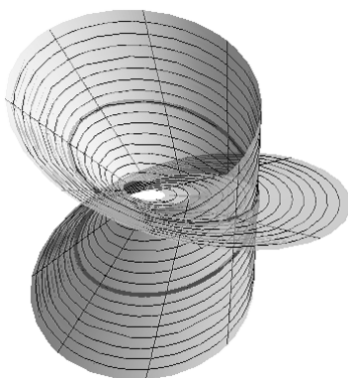


図6 漸近的完備化上にカスプ辺以外の特異点を1つだけもつ例

閉測地線を含む可展的な Möbius の帯は『带状の長方形の「紙」の両端をつなげて作れる』という点で，重要である．例えば，図1の生成曲線は測地線となっているのだが，図の上部真ん中を生成曲線に対して垂直にハサミで切り，平面に展開すると，带状の長方形となっている．

閉測地線を含む可展的な Möbius の帯の例は, Wunderlich [9] が初めて構成した. 最近, 黒野と梅原 [5] は, 任意の位相型に対してこのような Möbius の帯が存在することを示した. したがって, 閉測地線を含む可展的な Möbius の帯も豊富に存在していることが分かる. そこで, この漸近的完備化上に現れるカस्प辺でない特異点の個数の下からの評価を行い, 次のような結果を得た.

定理. 閉測地線を含む可展的な Möbius の帯の漸近的完備化上には, カस्प辺以外の特異点が 3 つ以上存在する.

さらに, カस्प辺以外の特異点がちょうど 3 つの例が存在する (図 1, 2). 命題と定理の証明には, とともに [4] におけるカस्प辺の判定法を用いた.

定理の証明の概要. 次のような手順で定理を証明する.

(1) $F(s, u) = \gamma(s) + u\xi(s)$ を可展的な Möbius の帯とし, その生成曲線 γ は測地線であるとする. $e(s)$ を γ の単位接ベクトルとする. $\gamma(s)$ の曲率関数 $\kappa(s)$ が 0 でない点において, $\gamma(s)$ の主法線ベクトル $n(s)$, 従法線ベクトル $b(s)$, 振率関数 $\tau(s)$ が存在する. 生成方向 $\xi(s)$ は「展直平面」への射影が単位ベクトルとなるように正規化しておく, ただし, 展直平面とは生成曲線の接ベクトルに直交する平面のことをいう. すると, $\xi(s)$ は, $e(s)$, $n(s)$, $b(s)$ の一次結合として

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}e(s) + b(s) \quad (\kappa(s) \neq 0)$$

と表せる. これを正規化された Darboux ベクトル場という (cf. [5]). ただし, 正規化された Darboux ベクトル場は, 曲率関数の零点では定義されない. また, 曲率関数の零点を越えると, ベクトルの向きが逆になる場合があることに注意せよ.

(2) $\sigma(s) := \tau(s)/\kappa(s)$ のことを γ の円錐的曲率 (conical curvature) という. 円錐的曲率も曲率関数の零点では定義されない. しかし,

$$\hat{\sigma} := e \cdot \xi$$

と定義すると, これは \mathbb{R} 上で C^∞ 級である. ただし「 \cdot 」(ドット) は \mathbb{R}^3 の標準内積である. しかも, 曲率関数の零点以外では, 符号の違いを除いて σ と一致している. この意味で $\hat{\sigma}$ は円錐的曲率の拡張となっている.

(3) $F(s, u)$ の特異点集合は,

$$S(F) := \left\{ (s, u) \in \mathbb{R}^2; u = -\frac{|\gamma'(s)|}{\hat{\sigma}'(s)}, \hat{\sigma}'(s) \neq 0 \right\}$$

で与えられる. したがって, (1 周期あたりの) 特異点集合 $S(F)$ の連結成分の個数は, 有限ならば, $\hat{\sigma}'(s)$ の零点の個数に等しい. また, [4] のカस्प辺の判定法を用いると, $S(F)$ の各連結成分上には, 少なくとも 1 つカस्प辺でない特異点が存在する. ゆえに, F のカस्प辺でない特異点の個数は, $\hat{\sigma}'(s)$ の零点の個数に等しいか, または大きい.

(4) $e = e(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$ を球面曲線と見なすとき, 円錐的曲率 $\sigma(s)$ は, 球面曲線 $e(s)$ の測地的曲率と一致することが知られている (cf. [2]). $\kappa(s)$ の零点で球面曲線 $e(s)$ は特異点となるが,

$\sigma(s)$ の拡張 $\hat{\sigma}(s)$ が \mathbb{R} 上で C^∞ 級なので, $e(s)$ の測地的曲率円も κ の零点を含めて \mathbb{R} 上で滑らかに定義できる.

- (5) $\hat{\sigma}(s)$ の零点が 1 つしかないと仮定し, 矛盾を導く. ここでは説明を簡単にするために, $\kappa(s)$ の零点は有限個とする. 今, $\xi(s)$ が l -奇周期的であったとすると, $\hat{\sigma}(s)$ も l -奇周期的である. よって, $\hat{\sigma}(s)$ は閉区間 $[0, l]$ 上で (狭義の) 単調関数であるとしてよい. すると, $[0, l]$ 上で球面曲線 $e(s)$ の測地的曲率円の拡張の族は, 渦巻き線の曲率円の族と同様の「入れ子構造」をもつ. つまり, 各測地的曲率円の拡張は, 他のどの測地的曲率円の拡張とも共通部分を持たない (渦巻き線の曲率円の入れ子構造については, [3] または [7] を見よ). 特に, 球面曲線 $e(s)$ が閉じず, 矛盾が生じる. よって, $\hat{\sigma}(s)$ の零点は 2 つ以上となるが, 2 つの場合は $\hat{\sigma}(s)$ の奇周期性から, 同様の議論によって矛盾が生じる. したがって, $\hat{\sigma}(s)$ の零点は 3 つ以上である. (3) により, 定理が示された.

参考文献

- [1] C. Chicone and N. J. Kalton, *Flat embeddings of the Möbius strip in \mathbb{R}^3* , Commun. Appl. Nonlinear Anal. **9** (2002), 31–50.
- [2] E. Heil, *A four-vertex theorem for space curves*, Math. Pannon. **10** (1999), 123–132.
- [3] A. Kneser, *Bemerkungen über die Anzahl der Extreme der Krümmung auf geschlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nichteuklidischen Geometrie*, Festschrift zum 70. Geburtstag von H. Weber 1912, 170–180.
- [4] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.
- [5] Y. Kurono and M. Umehara, *Flat Möbius strips of given isotopy type in R^3 whose centerlines are geodesics or lines of curvature*, Geom. Dedicata **134** (2008), 109–130.
- [6] S. Murata and M. Umehara, *Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space*, J. Diff. Geom. **82** (2009), 279–316.
- [7] U. Pinkall, *On the four-vertex theorem*, Aequationes Math. **34** (1987), 221–230.
- [8] P. Røgen, *Embedding and knotting of flat compact surfaces in 3-space*, Comment. Math. Helv. **76** (2001), 589–606.
- [9] W. Wunderlich, *Über ein abwickelbares Möbiusband*, Monatsh. Math. **66** (1962), 276–289.

測度の集中現象とラプラシアン固有値の挙動

船野 敬 熊本大学工学部数理工学科 PD
yahoontaikou@gmail.com

1 序

本講演では測度の集中現象 (後述) と閉 Riemann 多様体上の Laplacian の固有値の挙動との関係について得られた結果を紹介する. 本講演の内容は塩谷隆氏 (東北大) との共同研究 [6] に基づく.

2 測度の集中現象と Laplacian の第 1 固有値

閉 Riemann 多様体 M に対し μ_M を $\mu_M(M) = 1$ と正規化した M 上の体積測度とする. 正数 r, κ に対して

$$\alpha_M(r; \kappa) := \sup\{\mu_M(M \setminus O_r(A)) \mid A \subseteq M \text{ は } M \text{ の Borel 集合で, } \mu_M(A) \geq \kappa\}$$

とおく. ここで $O_r(A)$ は A の開 r 近傍である. 閉 Riemann 多様体の列 $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ に対する測度の集中現象は次のように漸近的に定義される.

定義 2.1 (Lévy 族). 列 $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ が Lévy 族であるとは, 任意の $r, \kappa > 0$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{M_n}(r; \kappa) = 0$ が成り立つときに言う. このことは $\kappa = 1/2$ のときのみを調べれば十分であることが簡単な考察でわかる, 即ち, $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ が Lévy 族であることと $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{M_n}(r; 1/2) = 0$ が任意の $r > 0$ について成り立つことは同値である.

Lévy 族の例としては Euclid 空間 \mathbb{R}^{n+1} の n 次元単位球面の列 $S^n(P. Lévy)$ 等色々知られている. Lévy 族のある種の無限次元位相群に関する応用については [5] と [7] を, 測度の集中現象については [11] を参照されたい.

閉 Riemann 多様体 M の Laplacian の固有値を重複度を込めて以下のように並べる: $0 = \lambda_0(M) < \lambda_1(M) \leq \lambda_2(M) \leq \dots$. Laplacian の第 1 固有値 $\lambda_1(M)$ と測度集中との関係についての最初の結果は次の定理である.

定理 2.2 (Gromov-V. Milman, [7]). M を閉 Riemann 多様体とする. このとき

$$\alpha_M(r; 1/2) \leq \exp(-\sqrt{\lambda_1(M)}/3)$$

が任意の $r > 0$ に対して成り立つ.

系 2.3 ([7]). $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ を閉 Riemann 多様体の列とする. このとき $\lambda_1(M_n)$ が $n \rightarrow \infty$ のとき無限大に発散するならば $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ は Lévy 族である.

定理 2.2 の不等式は次の定理によって良い不等式であることがわかる. 閉 Riemann 多様体 M に対して

$$D_{\text{Exp}}(M) := \sup\{D > 0 \mid \alpha_M(r; 1/2) \leq \exp(-Dr) \text{ for } \forall r > 0\}$$

とおく.

定理 2.4 (E. Milman, [9]). M を非負 Ricci 曲率をもつ閉 Riemann 多様体とする. このとき, (M や次元や何にも寄らない) universal な定数 $C > 0$ が存在して $D_{\text{Exp}}(M) \leq C\sqrt{\lambda_1(M)}$ が成り立つ.

更に強く E. Milman は次の定理を示した.

定理 2.5 (E. Milman, [9, 10]). M を非負 Ricci 曲率をもつ閉 Riemann 多様体とする. このとき, (M や次元や何にも寄らない) universal な定数 $C, \kappa_0 > 0$ が存在して $\alpha_M(r; 1/2) \leq \kappa_0$ ならば, $\lambda_1(M) \geq C/r^2$ となる.

定理 2.2 と合わせると次の系を得る.

系 2.6. $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ を Ricci 曲率が非負の閉 Riemann 多様体の列とする. このとき次の 2 条件は同値となる.

- (1) $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ は Lévy 族である.
- (2) $\lambda_1(M_n)$ が $n \rightarrow \infty$ のとき無限大に発散する.

E. Milman は上の 2 つの定理を Riemann 幾何と幾何学的測度論の結果 (非負 Ricci 曲率の下での isoperimetric profile の凸性) を用いて示した. 定理 2.2 は graph の場合でも結果が知られているが, 定理 2.4, 2.5 の (然るべき Ricci 曲率の定義の下での) graph 版の定理は知られていない.

3 主結果

我々は M_n の測度の集中現象と Laplacian の第 k 固有値 $\lambda_k(M_n)$ の挙動との関係について研究した.

定理 3.1. k を自然数とし, 非負 Ricci 曲率を持つ閉 Riemann 多様体の列 $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ の直径が一様に有界とする. もし第 k 固有値 $\lambda_k(M_n)$ が $n \rightarrow \infty$ のときに無限大に発散するならば, 列 $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ は Lévy 族である.

上の E. Milman の結果 (定理 2.5) と合わせると次を得る.

系 3.2. 非負 Ricci 曲率を持つ閉 Riemann 多様体 $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ の直径が一様に有界とする. このとき次の 3 つの条件 (1), (2), (3) は互いに同値となる.

- (1) $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ は Lévy 族.
- (2) 全ての $k \geq 1$ に対して $\lambda_k(M_n)$ が $n \rightarrow \infty$ のときに無限大に発散する.
- (3) ある $k \geq 1$ に対して $\lambda_k(M_n)$ が $n \rightarrow \infty$ のときに無限大に発散する.

定理 3.1 の直径の仮定について外せるかどうかについては現時点ではよくわからない (後述の命題 4.1 を参照されたい). また定理 3.1 は Ricci 曲率の下限を任意の実数 K に代えても成立するが, その場合は K に応じた直径の上限を仮定する (詳しくは [6] 参照). 定理 3.1 の M_n の次元が一様に上から押さえられている場合は S. Y. Cheng の固有値と次元による直径の評価 [1] から M_n の直径が $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束することがわかり, このときは $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ は明らかに Lévy 族である. 定理 3.1 で問題となるのは M_n の次元が $n \rightarrow \infty$ のときに無限大に発散する場合である. 例えば Euclid 空間の n 次元単位球面の列は系 3.2 の条件 (1), (2), (3) 全てを満たす. 定理 3.1 の証明では測度距離空間の間の Gromov が定義した距離に関する収束について調べる ([8]). 我々は測度距離空間の列がその距離に関してある測度距離空間に収束するときに, その測度距離空間は**集中する**という. その距離に関して 1 点からなる空間に収束することと Lévy 族であることは同値となる.

定理 3.1 の証明のために我々は次の 2 つの定理を証明する.

定理 3.3. 閉 Riemann 多様体の列 $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ の直径が一様に有界とする. もしある自然数 k に対して $\lambda_k(M_n)$ が $n \rightarrow \infty$ のときに無限大に発散するならば, $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列が存在してその部分列は k 点以下からなる測度距離空間に集中する.

定理 3.3 は Gromov の本 [8] の演習問題に解答を与える. 証明には Chung-Grigor'yan-Yau [2, 3] の結果を用いる. 極限の存在に直径の一様有界性を本質的に用いる. 直径の条件がなければ定理 3.3 は一般には成立しない.

定理 3.4. $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ を無限次元 Brunn-Minkowski 条件 $\text{BM}(0, \infty)$ を満たす直径が一様に有界な測度距離空間の列とする. もし X_n が compact な測度距離空間 X に集中するならば極限空間 X は連結である.

無限次元の Brunn-Minkowski の条件 $\text{BM}(0, \infty)$ についての正確な定義はここではしないが, Euclid 空間で知られていた Brunn-Minkowski の不等式の次元不変版と思っていたら良い. 非負 Ricci 曲率をもつ完備 Riemannian 多様体は $\text{BM}(0, \infty)$ を満たすことが知られている ([12] 参照). 従って定理 3.1 は定理 3.3, 3.4 から導かれる. 直径の一様有界性や極限の compact 性の仮定が必要であるかどうかについては現時点ではよくわからない. $\text{BM}(0, \infty)$ を満たす測度距離空間は弧長空間である, 即ち, 任意の 2 点間の距離はそれらの点を結ぶ連続曲線の長さの下限と一致する. 弧長空間は明らかに連結であることに注意する. (測度付)Gromov-Hausdorff 収束の下での極限空間は一般に弧長空間であることが知られている (Ricci の下限や直径の条件等いらずに無条件に成り立つ). $\text{BM}(0, \infty)$ のようなある種の Ricci 曲率の下限を仮定しないと定理 3.4 は成立しない, 即ち, その場合には極限が連結でないような例が構成できる. X_n が Ricci 曲率の一様な下限を持つ完備 Riemann 多様体の列で次元が一様に上から押さえられている場合は, X_n がある測度距離空間 X に集中することと測度付 Gromov-Hausdorff 収束に関して収束することは同値となることが知られている ([4]), 従ってこの場合は極限は弧長空間となることがわかる. 定理 3.4 で問題となるのは X_n の次元が無限大に発散する場合である.

4 Laplacian の固有値の間の関係に関する考察

この章では定理 3.1 の手法の応用として Laplacian の固有値の間の universal な不等式について議論する. 系 3.2 の (2) と (3) の同値性に着目すると次の命題が得られる.

命題 4.1. 定理 3.1 が直径の仮定なしで成立するならば, 以下の事が成立する. M を非負 Ricci 曲率をもつ閉 Riemann 多様体とする. このとき自然数 k のみによる universal な正定数 C_k (次元や M 自身には依らない) が存在して,

$$\lambda_k(M) \leq C_k \lambda_1(M).$$

現時点では定理 3.1 の証明を追うことにより次の評価を得ることしか至っていない.

定理 4.2. M を Ricci 曲率が非負の閉 Riemann 多様体とする. このとき M の直径のみに依存する universal な定数 $C > 0$ (次元や M 自身には依らない) が存在して,

$$\lambda_2(M) \leq C \lambda_1(M) \{\log(1 + \lambda_1(M))\}^2.$$

参考文献

- [1] S. Y. Cheng, *Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications*, Math. Z. **143**, no. 3, 289–297, 1975
- [2] F. R. K. Chung, A. Grigor’yan, and S.-T. Yau, *Upper bounds for eigenvalues of the discrete and continuous Laplace operators*, Advances in Mathematics **117**, 65–178, 1996.
- [3] F. R. K. Chung, A. Grigor’yan, and S.-T. Yau, *Eigenvalues and diameters for manifolds and graphs*, Tsing Hua lectures on geometry & analysis (Hsinchu, 1990–1991), 79–105, Int. Press, Cambridge, MA, 1997.
- [4] K. Funano, *Asymptotic behavior of mm-spaces*, Thesis, 2009.
- [5] K. Funano, *Concentration of maps and group action*, to appear in Geom. Dedicata.
- [6] K. Funano and T. Shioya, *Concentration of measure phenomenon and eigenvalues of Laplacian*, in preparation.
- [7] M. Gromov and V. D. Milman, *A topological application of the isoperimetric inequality*, Amer. J. Math. **105**, no. 4, 843–854, 1983.
- [8] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Based on the 1981 French original, With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes. Translated from the French by Sean Michael Bates. Progress in Mathematics, 152. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.
- [9] E. Milman, *On the role of convexity in isoperimetry, spectral gap and concentration*, Invent. Math. **177**, no. 1, 1–43, 2009.
- [10] E. Milman, *Isoperimetric and Concentration Inequalities - Equivalence under Curvature Lower Bound*, to appear in Duke Math.
- [11] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs, 89. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [12] S. Ohta, *Ricci curvature, entropy and optimal transport*, lecture notes for the summer school in Grenoble, 2009. Available online at “<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~sohta/>”.

p -ディリクレ和有限関数と無限グラフの幾何

服部多恵

(金沢大学自然科学研究科, 大阪市立大学数学研究所)

2010年8月7日

距離空間 (X, d_X) から (Y, d_Y) への写像 ϕ が κ -quasi monomorphism であるとは、次の二条件を満たすこととする：(1) すべての $x, y \in X$ に対して $d_Y(\phi(x), \phi(y)) \leq \kappa(d_X(x, y) + 1)$ が成り立つ；(2) 任意の $y \in Y$ に対して $\phi^{-1}(B(y, 1))$ は κ 個以下の X における半径 1 の距離球で覆われる。(ここで $B(y, 1)$ は Y における中心 y 半径 1 の距離球とする。) ([1] 参照). 次数有界な無限グラフや「有界幾何をもつ」完備連結非コンパクトリーマン多様体において、擬等長写像 (quasi isometry) の不変的性質や不変量について多くの研究成果がある。例えば、体積の増大度、容量 (capacity), p -放物性 (p -parabolicity) などについて研究されている ([5], [6], [3], [4] 参照). また, p -ディリクレ和有限な p -調和関数の全体も擬等長不変である ([2] 参照). quasi monomorphism と擬等長の合成も quasi monomorphism であり, その存在・非存在も擬等長不変な性質である。この講演では, p -ディリクレ和有限な p -調和関数の集合と quasi monomorphism について最近得られた結果を紹介する。なお, 本講演の内容は, 加須栄篤氏 (金沢大学) との共同研究に基づく。

以下必要な用語, 記号を準備する。本講演を通して, グラフ $G = (V, E)$ とは有界次数を持つ連結可算無限グラフとする。ここで, V は頂点の集合, E は辺の集合である。各辺の長さを 1 とすることによって, グラフには自然な距離が定まり, 以後グラフを距離空間と考える。指数 p は $1 < p < +\infty$ とする。 V 上の関数 f に対して

$$D_p(f) = \sum_{\{x,y\} \in E} |f(y) - f(x)|^p < +\infty$$

を満たすとき f は p -ディリクレ和有限関数であるという。 p -ディリクレ和有限関数の全体を $L^{1,p}(G)$ とする。 $L^{1,p}(G)$ はノルム $D_p(f)^{1/p} + |f(o)|$ に関するバナッハ空間である。ここで, $o \in V$ は固定点である。台が有限な V 上の関数全体の閉包を $L_0^{1,p}(G)$ とおく。すべての $g \in L_0^{1,p}(G)$ に対して

$$\sum_{x \in V} \sum_{y \in V_x} |h(y) - h(x)|^{p-2} (h(y) - h(x))(g(y) - g(x)) = 0$$

が成り立つような関数 $h \in L^{1,p}(G)$ を p -ディリクレ和有限な p -調和関数といい、その全体を $HL^{1,p}(G)$ とおく。ここで、 V_x は x と隣接する頂点全体の集合とする。

次の定理はこれからの議論の要である。

定理 1. グラフ G_1 からグラフ G_2 への κ -quasi monomorphism $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ が存在するならば、任意の $f \in L^{1,p}(G_2)$ に対して、 $f \circ \phi \in L^{1,p}(G_1)$ となり、 $D_p(f \circ \phi) \leq CD_p(f)$ が成り立つ。ただし C は p , κ , $\sup_{v \in V_i} \#(V_i)_x$ ($i = 1, 2$) のみに依存して決まる正数である。さらに $g \in L_0^{1,p}(G_2)$ に対して、 $g \circ \phi \in L_0^{1,p}(G_1)$ が成り立つ。

さて、 $\bar{H}^{1,p}(G) = L^{1,p}(G)/L_0^{1,p}(G)$ と定義する。このとき、 $HL^{1,p}(G)$ の元が代表元としてとれること (ロイデン分解) から、 $HL^{1,p}(G)$ と $\bar{H}^{1,p}(G)$ には全単射の対応がある。

つぎに $\bar{H}^{1,p}(G)$ について二つの指標を導入する。 $1 \in L_0^{1,p}(G)$ であるときグラフ G は p -放物型 (p -parabolic) であるという。これは $\dim \bar{H}^{1,p}(G) = 0$ 、すなわち $L^{1,p}(G) = L_0^{1,p}(G)$ と同値である (詳しくは [10] 参照)。 $1 < p < q < +\infty$ であるとき p -放物型ならば q -放物型であることより $\text{ind}(G) := \inf \{p ; p\text{-放物型}\} (\leq +\infty)$ と定義して、グラフ G の放物型指標という。これは擬等長不変である ([9] 参照)。例えば、 d 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^d (あるいはそれと擬等長な格子 \mathbf{Z}^d) に対して $\text{ind}(\mathbf{R}^d) = d$ である ([9], [7] 参照)、さらに $p < d$ ならば $\dim \bar{H}^{1,p}(\mathbf{R}^d) = 1$ 、 $p \geq d$ ならば $\dim \bar{H}^{1,p}(\mathbf{R}^d) = 0$ である。もう一つの指標として、 $p(G) := \inf \{p ; \dim \bar{H}^{1,p}(G) > 1\} (\leq +\infty)$ と定義する ([8] 参照)。これも擬等長不変である。 n 次元双曲空間 $\mathbf{H}^n(-1)$ (あるいはそれと擬等長なグラフ $G^n(-1)$) の場合、 $p(\mathbf{H}^n(-1)) = n - 1$ であり、 $p \leq n - 1$ に対して $\dim \bar{H}^{1,p}(\mathbf{H}^n(-1)) = 1$ 、 $p > n - 1$ の場合は $\dim \bar{H}^{1,p}(\mathbf{H}^n(-1)) = +\infty$ である。

例 1. l 個の自然数 $d_1 < d_2 < \dots < d_{l-1} < d_l$ をとる。各 \mathbf{Z}^{d_i} と $\mathbf{Z}^{d_{i+1}}$ を一つの辺で繋げてできるグラフを G とする。このとき $\text{ind}(G) = d_l$ で、 $p < d_1$ ならば $\dim \bar{H}^{1,p}(G) = l$ 、 $d_i \leq p < d_{i+1}$ ならば $\dim \bar{H}^{1,p}(G) = l - i$ ($i = 1, 2, \dots, l - 1$)、 $d_l \leq p$ ならば $\dim \bar{H}^{1,p}(G) = 0$ である。

例 2. $d < n - 1$ とする。可算無限個の \mathbf{Z}^d と $G^n(-1)$ をそれぞれ一辺で繋いでできるグラフを G とする。 $\text{ind}(G) = +\infty$ で、 $p < d$ 、 $p > n - 1$ のとき $\dim \bar{H}^{1,p}(G) = +\infty$ 、 $d \leq p \leq n - 1$ のとき $\dim \bar{H}^{1,p}(G) = 1$ である。

例 3. \mathbf{Z}^d と $G^n(-1)$ の直積グラフ G について、 $\text{ind}(G) = +\infty$ で、すべての p について $\dim \bar{H}^{1,p}(G) = 1$ である。

定理 1 より次の事実が分かる。

定理 2. グラフ G_1 からグラフ G_2 への quasi monomorphism が存在するならば、 $\text{ind}(G_1) \leq \text{ind}(G_2)$ 。

この定理より d 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^d への quasi monomorphism を持つグラフ G の放物型指標 $\text{ind}(G) \leq d$ であり、特に有限であることが分かる。

n 次元双曲空間 $\mathbf{H}^n(-1)$ への quasi monomorphism が存在するグラフ G に焦点を当てる.

定理 3. G から $\mathbf{H}^n(-1)$ への quasi monomorphism が存在し, $n - 1 < \text{ind}(G)$ とする. このとき, $n - 1 < p < \text{ind}(G)$ を満たす指数 p に対して $\dim \bar{H}^{1,p}(G) = +\infty$.

ここでホロ球面 $\mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \mathbf{H}^n(-1)$ は, quasi monomorphism であることに注意する. また, \mathbf{Z}^d と $G^n(-1)$ の直積グラフ, あるいは $\mathbf{R}^d \times \mathbf{H}^n(-1)$ からユークリッド空間あるいは双曲空間形への quasi monomorphism は存在しないことになる.

最後に上の定理と Bonk-Schramm の埋め込み定理からの帰結を述べる.

系 4. G からグロモフの意味でのヴィジュアル双曲グラフへの quasi monomorphism が存在するとする. このとき, $\text{ind}(G) = +\infty$ ならば p_* が存在して, 任意の $p_* < p$ に対して $\dim \bar{H}^{1,p}(G) = +\infty$ である.

参考文献

- [1] I. Benjamini and O. Schramm, Harmonic functions on planar and almost planar graphs and manifolds, via circle packings, Invent math. **126** (1996)565-587.
- [2] T. Hattori and A. Kasue, Dirichlet finite harmonic functions and points at infinity of graphs and manifolds, Proc. Japan Acad. **83**, Ser. A, No.7 (2007)129-134.
- [3] I. Holopainen, Rough isometries and p -harmonic functions with finite Dirichlet integral, Rev. Math. Iberoamericana **10** (1994), 143-176.
- [4] I. Holopainen and P. M. Soardi, p -harmonic functions on graphs and manifolds, Manuscripta Math. **94** (1997), 95-110.
- [5] M. Kanai, Rough isometries, and combinatorial approximations of geometries of non-compact Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan **37** (1985), 391-413.
- [6] M. Kanai, Rough isometries and the parabolicity of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan **38** (1986), 227-238.
- [7] F-Y. Maeda, A remark on parabolic index of infinite networks, Hiroshima Math. J. **7**(1977), 147-152.
- [8] P. Pansu, Cohomologie L^p des variétés à courbure négative, cas du degré 1, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Fascicolo Speciale P.D.E and Geometry (1989), 95-119.

- [9] P. M. Soardi and M. Yamasaki, Parabolic index and rough isometries, *Hiroshima Math. J.* **23** (1993), 333–342.
- [10] M. Yamasaki, Parabolic and hyperbolic infinite networks, *Hiroshima Math. J.* **7**, 1977, 135–146.

非固有アファイン波面のガウス写像の除外値問題について

九州大学大学院数理学研究院 川上 裕* (Kawakami Yu)

概要

In this talk, we give the best possible upper bound for the number of exceptional values of the Lagrangian Gauss map of weakly complete improper affine fronts in the affine three-space. Moreover, as an application of the result, we provide a new proof of the classification of affine complete improper affine spheres. This is joint work with Daisuke Nakajo (Kyushu university).

1 序

アファイン幾何学において、アファイン球面の性質を調べることは重要な研究課題の1つである。特に、非固有アファイン球面と呼ばれるクラスは、微分幾何の他の様々なテーマと結びつきがあり、その視点から非常に面白い結果が示されている。Martínez [Ma] は、非固有アファイン球面と2次元複素空間 \mathbf{C}^2 への special Lagrangian はめ込みとの間の対応を発見し、これを用いて、「非固有アファイン波面」と呼ばれる、ある種の特異点を許した曲面のクラスを定義した。このクラスは具体例が多く存在し、そのクラスにおける大域的性質が期待される。そこで、我々は論文 [KN] において、非固有アファイン波面が、梅原雅顕氏・山田光太郎氏 [UY] がによって定義された「弱完備性」と呼ばれる完備性をみたすときの Lagrangian Gauss 写像の値分布、特に除外値数の評価を調べ、その最良の上限を与えることができた。また、このことを応用することで、Jürgen [Jo], Calabi [Ca] によって示された、アファイン完備な非固有アファイン球面の一意性を示す結果について、Gauss 写像の値分布の視点からの比較的シンプルな証明を与えることができた。さらに、この議論は3次元双曲型空間の平坦波面にも応用することができ、完備な平坦曲面のときの一意性定理 ([Sa], [VV]) の別証も与えることができた。ここでは以下、弱完備な非固有アファイン波面のクラスで得られた結果について、基本事項を交えて紹介する。

2 準備

本節では、3次元アファイン空間 \mathbf{R}^3 内の非固有アファイン波面の定義とその性質を紹介する。アファイン幾何学のことについては、文献 [LSZ], [NS] を参照した。

*kawakami@math.kyushu-u.ac.jp, 〒 819-0395 福岡市西区元岡 744

非固有アファイン波面は, Martínez [Ma] による, 非固有アファイン球面と \mathbf{C}^2 への special Lagrangian はめ込みとの対応から, 次のように定義される.

定義 2.1. なめらか写像 $\psi: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3 = \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ が非固有アファイン波面 (improper affine front) であるとは,

$$\psi = \left(x, - \int \langle n, dx \rangle \right) \quad (2.1)$$

と表せる special Lagrangian はめ込み $L_\psi = x + \sqrt{-1}n: \Sigma \rightarrow \mathbf{C}^2$ が存在するときをいう.

この写像が実際に \mathbf{R}^3 内の波面 (フロント) となることは [Na], [UY] に示してある. 非固有アファイン球面はこのクラスの特異点をもたない場合に対応する. ψ の正則でない点は, $ds^2 := \langle dx, dx \rangle$ の退化する点に対応している. この ds^2 を ψ の平坦基本形式という. ds^2 が退化しない点では, \mathbf{C}^2 からの L_ψ による誘導計量 $d\tau^2 := \langle dx, dx \rangle + \langle dn, dn \rangle$ は ψ のアファイン計量 $g := -\langle dx, dn \rangle$ と共形的である ([Ma]). そこで, $d\tau^2$ によって与えられる共形構造により Σ に複素構造を入れ, Σ を Riemann 面とみなす. \mathbf{C}^2 の special Lagrangian はめ込みの性質より, 正則 (regular) な複素曲線 $\alpha: \Sigma \rightarrow \mathbf{C}^2$, $\alpha := (F, G)$ が存在し, このとき, 非固有アファイン波面を構成する x, n はそれぞれ

$$x = G + \bar{F}, \quad n = \bar{F} - G \quad (2.2)$$

となる. また, 複素数 ζ_1, ζ_2 に対して, その内積を $\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle := \Re(\zeta_1 \bar{\zeta}_2)$ とするとき, 平坦基本形式 ds^2 , 誘導計量 $d\tau^2$, アファイン計量 g はそれぞれ

$$\begin{aligned} ds^2 &= |dF + dG|^2 = |dF|^2 + |dG|^2 + dGdF + \overline{dFdG} \\ d\tau^2 &= 2(|dF|^2 + |dG|^2) \\ g &= |dG|^2 - |dF|^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる. このとき, special Lagrangian はめ込み L_ψ の Gauss 写像の非自明な部分として現れる Σ 上の有理型関数

$$\nu := \frac{dF}{dG}$$

を ψ の **Lagrangian Gauss 写像** (Lagrangian Gauss map) という. この写像の値分布とこのクラスの大域的性質との関係を調べるのが今回の主題である. 実は, 非固有アファイン波面は (2.2) を用いて構成することができる. 以上のことをまとめると次のようになる.

事実 2.2 ([Ma]). $\psi = (x, \phi): \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3 = \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ を非固有アファイン波面とする. このとき, 正則 (regular) な複素曲線 $\alpha := (F, G): \Sigma \rightarrow \mathbf{C}^2$ が存在し,

$$\psi = \left(G + \bar{F}, \frac{|G|^2 - |F|^2}{2} + \Re \left(GF - \int F dG \right) \right) \quad (2.4)$$

となる. 逆に, Riemann 面 Σ と正則な複素曲線 $\alpha := (F, G)$ が与えられたとき, $\int F dG$ が実周期を持たなければ, (2.4) で与えられる ψ が Σ 上で定義される非固有アファイン波面となる. このとき, ψ の特異点は $|dF| = |dG|$, つまり $|\nu| = 1$ となる点に対応している.

非固有アファイン波面の大域的性質を調べるため、ここでは $d\tau^2$ が完備 Riemann 計量となることを考える。この完備性を弱完備 (weakly complete) 性 [UY] という。これは通常の意味での波面の完備性の定義 ([KUY], [Ma], [SU]) より弱いものであるが、普遍被覆をとっても性質は保たれるという利点がある。2次曲面論で現れる楕円放物面は、弱完備な非固有アファイン波面の例となる。実際、 $\Sigma = \mathbf{C}$ とし、 $(F, G) = (cz, z)$ (c は $|c| \neq 1$ となる定数) とおくと、(2.4) で構成することができる。特に、その Lagrangian Gauss 写像は定数写像となる。さらに、この例は特異点を持たないので、実際には非固有アファイン球面のクラスに属する。

3 主結果

我々は弱完備な非固有アファイン波面の Lagrangian Gauss 写像の値分布について調べ、以下に述べる結果を得ることができた。まず、波面の端 (エンド) の状況と $d\tau^2$ に関する Gauss-Bonnet 型の定理を用いることで、Lagrangian Gauss 写像が定数写像の場合の非固有アファイン波面の特徵付けを得ることができた。

命題 3.1 ([KN]). Lagrangian Gauss 写像が定数写像となる弱完備な非固有アファイン波面は楕円放物面である。

次に、弱完備な非固有アファイン波面の Lagrangian Gauss 写像の像の補集合の元の数、つまり除外値数について、藤本坦孝氏によって得られた \mathbf{R}^3 の極小曲面の Gauss 写像の除外値数の議論 ([Fu1], [Fu2]) をこのクラスの状況に合わせ精密化することで、最良の上限を与えることができた。

定理 3.2 ([KN]). $\psi: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を弱完備な非固有アファイン波面とし、 $\nu: \Sigma \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ をその Lagrangian Gauss 写像とする。もし ν が定数写像でなければ、 ν の除外値数は高々3である。

この評価は最良である。実際、2つの異なる点 $a_1, a_2 \in \mathbf{C}$ に対して、 Σ を $\mathbf{C} \setminus \{a_1, a_2\}$ とし、Lagrangian Gauss 写像 ν と正則1次微分形式 dG を

$$(\nu, dG) = \left(z, \frac{dz}{\prod_j (z - a_j)} \right)$$

とする。このとき、Weierstrass data (F, G) は Σ 上で well-defined ではないので、 Σ の普遍被覆面上で定義する。このように得られた非固有アファイン波面は弱完備であり、かつ ν の除外値は a_1, a_2, ∞ の3点である。

この結果の応用として、アファイン完備な非固有アファイン球面の一意性定理の見通しのよい証明を与えることができる。

系 3.3 ([Jo], [Ca], [KN]). アファイン完備な非固有アファイン球面は楕円放物面である。

証明. 非固有アファイン球面は特異点を持たないことより, ν の除外値集合は $\{|\nu| = 1\}$ を含む. よって, 必要ならば, dF と dG を入れ替えることで, $|\nu| < 1$, つまり $|dF| < |dG|$ が成り立つ. 一方, アファイン計量 $g = |dG|^2 - |dF|^2$ と $d\tau^2$ について

$$g = |dG|^2 - |dF|^2 < 2(|dF|^2 + |dG|^2) = d\tau^2$$

が成り立つので, g が完備, つまり任意の発散路で長さが無限大となる時, $d\tau^2$ も完備となる. 故に弱完備性をみたすことになり, 定理 3.2 から ν は定数写像となり, 命題 3.1 からそれは楕円放物面である. \square

参考文献

- [Ca] E. Calabi, *Improper affine hypersurfaces of convex type and a generalization of a theorem by K. Jörgens*, Mich. Math. J., **5** (1958), 108–126
- [Fu1] H. Fujimoto, *On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces*, J. Math. Soc. Japan, **40** (1988), 235 – 247.
- [Fu2] H. Fujimoto, *Value Distribution Theory of the Gauss Map of Minimal Surfaces in \mathbf{R}^m* , Vieweg, 1993.
- [Jo] K. Jörgens, *Über die Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$* , Math. Ann. **127** (1954), 130–134.
- [IM] G. Ishikawa and Y. Machida, *Singularities of improper affine spheres and surfaces of constant Gaussian curvature*, Internat. J. Math. **17** (2007), 269–293.
- [Ka] Y. Kawakami, *Value distribution of the hyperbolic Gauss maps for flat fronts in hyperbolic three-space*, to appear in Houston Journal of Mathematics, arXiv:0908.1307.
- [KKM] Y. Kawakami, R. Kobayashi and R. Miyaoka, *The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces*, Forum Math., **20** (2008), 1055–1069.
- [KN] Y. Kawakami, D. Nakajo, *The value distribution of the Gauss map of improper affine spheres*, preprint, arXiv:1004.1484 and MI 2010-16 (MI PREPRINT SERIES, Kyushu university).
- [KUY] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math., **216** (2004), 149–175.
- [LSZ] A.-M. Li, U. Simon and Z. Zhao, *Global affine differential geometry of hypersurfaces*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1993.

- [Ma] A. Martínez, *Improper affine maps*, Math. Z., **249** (2005), 755–766.
- [Na] D. Nakajo, *A representation formula for indefinite improper affine spheres*, Result. Math., **55** (2009), 139–159.
- [NS] K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine differential geometry*, Cambridge University Press, 1994.
- [Sa] S. Sasaki, *On complete flat surfaces in hyperbolic 3-space*, Kōdai Math Sem. Rep. **25** (1973), 449–457.
- [SUY] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math., **169** (2009), 491–529.
- [UY] M. Umehara and K. Yamada, *Applications of a complete lemma in minimal surface theory to various classes of surfaces*, preprint, arXiv:0909.1128.
- [VV] Y. A. Volkov and S. M. Vladimirova, *Isometric immersions of the Euclidean plane in Lobačevskii space* (Russian), Mat. Zametki **10** (1971), 327–332.

周期的極小曲面の諸性質について

庄田 敏宏

佐賀大学 文化教育学部

$f: M \rightarrow \mathbf{R}^n$ を曲面 M からの固有で n 方向に周期的な極小はめ込みとすると, f は種数 γ のコンパクト曲面 M_γ から適当な平坦トーラスへの極小はめ込み $f: M_\gamma \rightarrow \mathbf{R}^n/\Lambda$ を与える. 周期的な極小曲面は界面活性剤の膜などに登場し, 自然現象とも密接に関係しているもので, 数学以外にも分子化学などへの応用もなされている研究対象である.

等温座標系により M_γ には Riemann 面の構造が入る. 共形構造を入れた極小はめ込みのことを共形極小はめ込みという. 極小曲面は以下の表現公式に見られる通り, 正則微分の線積分で与えられる:

Theorem 1 (Weierstrass の表現公式).

$f: M_\gamma \rightarrow \mathbf{R}^n/\Lambda$ をコンパクト曲面の共形極小はめ込みとすると, 平行移動は無視して, f は次のように表される:

$$f(p) = \Re \int_{p_0}^p (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T \pmod{\Lambda},$$

ここで, p_0 は M_γ の定点, T は転置行列を意味し, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ は以下の三つの条件をみたすような M_γ 上の正則微分である:

- (1) $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ は共通零点をもたない,
- (2) $\sum_{i=1}^n \omega_i^2 = 0$,
- (3) $\left\{ \Re \int_\gamma (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T \mid \gamma \in H_1(M_\gamma, \mathbf{Z}) \right\}$ は Λ の部分格子となる.

一方, 正の種数をもつコンパクト Riemann 面は Jacobi 多様体といわれる複素トーラスに正則に埋め込まれる. 特に, 正の種数をもつコンパクト Riemann 面は複素トーラスへ極小に埋め込まれる:

Theorem 2 (Abel-Jacobi の埋め込み定理).

M_γ を正の種数 γ をもつコンパクト Riemann 面とし, $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\gamma\}$ を M_γ 上の正則微分全体の空間の基底とする. 今, Λ を以下の周期行列とする:

$$\Lambda = \left\{ \int_\gamma (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\gamma)^T \mid \gamma \in H_1(M_\gamma, \mathbf{Z}) \right\},$$

さらに, M_γ の jacobi 多様体を $\text{Jac}(M_\gamma)(= \mathbf{C}^\gamma/\Lambda)$ で表す. このとき, 以下の j は正則埋め込みになる:

$$j : M_\gamma \longrightarrow \text{Jac}(M_\gamma)$$

$$p \longmapsto \int_{p_0}^p (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\gamma)^T.$$

Theorem 2 内の j は Abel-Jacobi 写像といわれ, 以下の普遍性をもつ:

Theorem 3 (Abel-Jacobi 写像の普遍性).

$f : M_\gamma \longrightarrow \mathbf{R}^n/\Lambda$ をコンパクト Riemann 面からの共形極小はめ込みとする. 適当な平行移動で $f(p_0) = 0$ としておく. このとき, $\text{Jac}(M_\gamma)$ から \mathbf{R}^n/Λ への (実) 準同型写像 h で $f = h \circ j$ をみたすようなものが存在する:

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Jac}(M_\gamma) & \\
 j \nearrow & \circlearrowleft & \searrow \exists h \\
 M_\gamma & \xrightarrow{f} & \mathbf{R}^n/\Lambda
 \end{array}$$

Torelli の定理や Schottky 問題などに見られるように, Abel-Jacobi 写像は代数曲線論において重要な役割を果たすことから, Theorem 3 を加味すると, 極小曲面の研究には代数曲線論や変形理論を始めとした様々な理論がリンクすることが判る. 本講演ではこうした周期的な極小曲面論の最新の研究成果を紹介したい.

参考文献

- [E] N. Ejiri, A generating function of a complex Lagrangian cone in \mathbb{H}^n , preprint.
- [ES] N. Ejiri and T. Shoda, in preparation.

コンパクト対称空間上のデザイン*

栗原 大武†

東北大学大学院理学研究科数学専攻

概要

1977年に Delsarte-Goethals-Seidel が球面デザインの定義を与えてから、球面上でのコード（距離集合）やデザインについて多くの研究がなされてきた。コードとデザインは組合せ論の重要な研究内容であり、相互に影響しながら発展してきた。本講演では、まずこの球面上のコードとデザインの理論を紹介する。ここではコードとデザインの性質を示しながら、この二つの概念は双対な関係にあることを紹介する。そして次に球面上の状況になぞらえてコンパクト対称空間上のデザインについて述べていく。

1 s -距離集合

$S^{d-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 = 1\}$ を \mathbb{R}^d 内の d 次元の単位球面とする。また \mathbb{R}^d には標準的な内積 (\cdot, \cdot) が入っているとす。 \mathbb{R}^d 上の多項式全体の作るベクトル空間を $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_d]$ とする。非負整数 l に対して l 次の斉次多項式全体の作るベクトル空間を

$$\text{Hom}_l(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \mid f(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{\substack{\lambda_1 + \dots + \lambda_d = l \\ \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_d \geq 0}} a_{\lambda_1, \dots, \lambda_d} x_1^{\lambda_1} \cdots x_d^{\lambda_d} \right\}$$

$(a_{\lambda_1, \dots, \lambda_d} \in \mathbb{R})$ と表す。ラプラス微分作用素 $\Delta = (\frac{\partial}{\partial x_1})^2 + \dots + (\frac{\partial}{\partial x_d})^2$ に対して $\Delta f = 0$ を満たす多項式を調和多項式と呼び、 l 次の斉次調和多項式全体の作るベクトル空間を $\text{Harm}_l(\mathbb{R}^d) = \{f \in \text{Hom}_l(\mathbb{R}^d) \mid \Delta f = 0\}$ とする。また \mathbb{R}^d 上の関数の定義域を S^{d-1} に制限する写像を ρ で表すことにする。 $\text{Hom}_l(\mathbb{R}^d)$ と $\text{Harm}_l(\mathbb{R}^d)$ の ρ による像をそれぞれ $\text{Hom}_l(S^{d-1})$ と $\text{Harm}_l(S^{d-1})$ で表す。このとき $\dim_{\mathbb{R}} \text{Harm}_l(S^{d-1}) = \binom{d+l-1}{l} - \binom{d+l-3}{l-2}$ であることが知られている。 S^{d-1} 上の 2 乗可積分関数空間 $L^2(S^{d-1}) = \{f \mid \int_{S^{d-1}} |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty\}$ は内積 $\langle f, g \rangle = \frac{1}{|S^{d-1}|} \int_{S^{d-1}} f(x)g(x) d\mu(x)$ に関して

$$L^2(S^{d-1}) = \bigoplus_{l \geq 0} \text{Harm}_l(S^{d-1})$$

と直和分解される。さらに $\text{Hom}_0(S^{d-1}) + \dots + \text{Hom}_t(S^{d-1}) = \bigoplus_{l=0}^t \text{Harm}_l(S^{d-1})$ が成り立つ。 $\mathcal{P}_t(S^{d-1}) = \bigoplus_{l=0}^t \text{Harm}_l(S^{d-1})$ とする。

$X \subset S^{d-1}$ を空でない有限集合とする。このとき X に対して $A(X) = \{(x, y) \mid x, y \in X, x \neq y\}$ とする。 $|A(X)| = s$ であるような有限集合 X を s -距離集合という。

- 例 1.1.** (1) S^2 上の正 20 面体の 12 点からなる頂点集合 (を正規化したもの) X_1 の内積の集合は $A(X_1) = \{-1, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\}$ であるので、 X_1 は 3-距離集合である。
(2) S^7 上の E_8 格子の原点からの距離が $\sqrt{2}$ の点全体からなる集合 (を正規化したもの) X_2 の内積の集合は $A(X_2) = \{-1, \pm \frac{1}{2}, 0\}$ であるので、 X_2 は 4-距離集合である。またこの集合は 240 点からなる。

* 第 57 回幾何学シンポジウム (2010 年 8 月 6 日~9 日, 神戸大学) 講演予稿。

† E-mail : sa9d05@math.tohoku.ac.jp

内積の取る値を s 個として固定して有限集合の点の個数を増やしていけば、 s -距離集合という性質を保つのが難しくなることは想像に難くない。実際球面デザインには Fisher 型の上界というものが知られている。この上界は調和多項式空間の次元と非常に密接な関係がある。証明を含め詳しくは [坂内-坂内, DGS77] などを参考にしていきたい。

定理 1.2 (Fisher 型の下界). X を S^{d-1} 上の球面 s -距離集合とする。このとき

$$|X| \leq \binom{d+s-1}{s} + \binom{d+s-2}{s-1}$$

が成り立つ。更に X が**対極的** ($x \in X$ ならば $-x \in X$) であれば上の上界より良い上界

$$|X| \leq 2 \binom{d+s-2}{s-1}$$

が存在する。

2 球面デザイン

球面デザインの概念は 1977 年に Delsarte-Goethals-Seidel [DGS77] によって導入された。

定義 2.1 (球面デザイン). $X \subset S^{d-1}$ を空でない有限集合とし、 t を正の整数とする。このとき X が**球面 t デザイン**(spherical t -design) であるとは任意の $f \in \mathcal{P}_t(S^{d-1})$ に対して、等式

$$\frac{1}{|S^{d-1}|} \int_{S^{d-1}} f(\xi) d\xi = \frac{1}{|X|} \sum_{\xi \in X} f(\xi)$$

が成り立つときにいう。

言い換えると、有限集合 $X \subset S^{d-1}$ が球面 t デザインとなるのは t 次以下の任意の多項式に対して球面での積分値の平均と X 上での値の平均が一致するときである。

例 2.2. (1) S^2 上の正 20 面体の 12 点からなる頂点集合 (を正規化したもの) は 5 デザインである。

(2) S^7 上の E_8 格子の原点からの距離が $\sqrt{2}$ の点全体からなる集合 (を正規化したもの) は 7 デザインである。またこの集合は 240 点からなる。

球面デザインは実用上でも重要な概念であり、組合せ論の立場からだけでなく解析学の立場などからも研究されている。解析学では球面デザインは求積公式 (cubature formula) の特殊な条件*1として知られている。本稿ではこのことについては詳しくは触れない。以下に球面デザインが実用されている例を一つ挙げておく。

例 2.3 (気象学). 今、我々が住んでいる地球を S^2 と見做す。 $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を地球上の各点での気温を表す関数とする。ここで地球の平均気温を正確に求めたいとき、本来ならば地球上至るところに観測所を設けて気温を観測しなければならない。一方 f が高々 t 次までの多項式で表せると仮定すると観測所を t デザインの性質を持つような配置にすれば、少ない数の観測所で地球の平均気温を算出できる。

球面デザインは積分平均の意味で球面全体を近似するものであるから、ある程度点の個数がないと近似できないように思われる。実際球面デザインには Fisher 型の下界というものが知られている。この下界は調和多

*1 求積公式は領域全体上での値の平均と有限集合上での値の平均の差がある程度小さければよいという近似で扱われることが多い。またこれらの誤差が全くない場合を扱うにせよ、有限集合は多重集合であったり、もっと一般的に各点に重みをつけたものが考えられているようである。しかし組合せ論の立場から見れば条件の強い (誤差、重みなし) 集合の方が面白いという信念で研究されている。

項式空間の次元と非常に密接な関係がある。証明を含め詳しくは [坂内-坂内, DGS77]などを参考にしていきたい。

定理 2.4 (Fisher 型の下界). X を S^{d-1} 上の球面 t デザインとする。このとき

$$|X| \geq \begin{cases} \binom{d+t/2-1}{t/2} + \binom{d+t/2-2}{t/2-1} & t \text{ が偶数のとき} \\ 2\binom{d+(t-1)/2-1}{(t-1)/2} & t \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

が成り立つ。更に等号成立しているとき、 X を**堅い**(tight) 球面 t デザインという。

ここで t -デザインの下界は s -距離集合の上界と類似しているように思われる。これは偶然の一致ではなく以下の事実から従う。

定理 2.5. X を S^{d-1} 上の s -距離集合かつ t -デザインとする。このとき

- (1) $t \leq 2s$ が成り立つ。更に $t = 2s$ のとき、またその時に限り X は堅い $2s$ -デザインなる。
- (2) X が対極的であるとする。このとき $t \leq 2s - 1$ が成り立つ。更に $t = 2s - 1$ のとき、またその時に限り X は堅い $(2s - 1)$ -デザインなる。

例 2.6. 現在知られている堅いデザインの例

$d = 2$ ($\forall t \geq 2$) \cdots regular $(t + 1)$ -gon

$t = 1$ ($\forall d \geq 2$) \cdots an antipodal set (2 points in S^{d-1})

$t = 2$ ($\forall d \geq 2$) \cdots the regular simplex ($d + 1$ points in S^{d-1})

$t = 3$ ($\forall d \geq 2$) \cdots the regular cross polytope ($2d$ points in S^{d-1})

$t = 4$ \cdots embeded of the schläfli graph in \mathbb{R}^6 (27 points in S^5), embeded of the McLaughlin graph in \mathbb{R}^{22} (275 points in S^{21})

$t = 5$ \cdots the icosahedron (12 points in S^2), an equiangular line set in \mathbb{R}^7 (56 points in S^6), an equiangular line set in \mathbb{R}^{23} (552 points in S^{22})

$t = 7$ \cdots the minimal vectors of the E_8 lattice (240 points in S^7), 4600 points in S^{22}

$t = 11$ \cdots the minimal vectors of the Leech lattice (196560 points in S^{23})

例 2.6 より $d = 2$ のときはどんな t に対しても堅い t デザインがあることがわかる。 $d \geq 3$ では $t = 1, 2, 3$ の場合を除くと堅いデザインの例は 8 個だけである。実は上に挙げた堅いデザインの例以外には“殆ど”存在しないことが以下の定理からわかる。

定理 2.7 (cf [BD79, BD80]). $d \geq 3$ とする。

- (1) $t = 2e, e \geq 3$ とする。このとき、球面 S^{d-1} 上に堅い t デザインは存在しない。更に次のことが成り立つ。
 - (1) $e = 1$ ($t = 2$) のとき S^{d-1} 上の堅い t デザインは d 次元 regular simplex に限る。
 - (2) $e = 2$ ($t = 4$) のとき S^{d-1} 上に堅い t デザインが存在するならば $d = (\text{奇数})^2 - 4$ である。
- (3) S^{d-1} において、堅い $t = (2e + 1)$ デザインが存在するならば、 $e \leq 3$ または $e = 5$ のいずれかが成り立つ。更に次のことが成り立つ。
 - (1) $e = 1$ ($t = 3$) のとき S^{d-1} 上の堅い t デザインは d 次元 regular cross polytope に限る。
 - (2) $e = 2$ ($t = 5$) のとき S^{d-1} 上に堅い t デザインが存在するならば $d = 2$ の正 20 面体の頂点集合 (12 点) または $d = (\text{奇数})^2 - 3$ である。
 - (3) $e = 3$ ($t = 7$) のとき S^{d-1} 上に堅い t デザインが存在するならば $d = 3(\text{自然数})^2 - 5$ である。
 - (4) $e = 5$ ($t = 11$) のとき堅いデザインは S^{23} 上の Leech 格子の原点からの距離が 2 の点全体からなる集合 (196560 個) に限る。

定理 2.7 の条件はあるものの, $t = 4, 5, 7$ の場合はまだ堅いデザインの分類が完全に終わっていない. 残りの場合の存在・非存在を決定することは重要な未解決問題である.

3 コンパクト対称空間上のデザイン

球面上の t -デザインは球面上の関数空間のあるクラス (t 次以下の調和多項式空間) に対して決まるものであった. これを一般のコンパクト対称空間上に定義する場合にも, 対称空間上の L^2 -関数空間を既約表現分解し, その中の部分的なクラスに対して定義するのがよいと思われる. ランクが 1 のコンパクト対称空間に関しては Bannai-Hoggar [BH85] によって研究されてきた. このランク 1 のコンパクト対称空間は 2 点等質空間かつ L^2 -関数空間を既約表現分解するとこれらの既約表現達は自然な線形順序を持つので, 球面の場合とほぼ同様に距離集合やデザインが定義出来る. 更に堅いデザインの分類もかなり進んでいる.

ランクが m ($m \geq 2$) のコンパクト対称空間に関しては球面上の場合と同様に Fisher 型の不等式を得ようとすると既約表現達をうまく集めないといけな. この予稿では複素 Grassmann 空間を例にとり, その類似性を見ていく.

$\mathcal{G}_{m,n}$ を複素数体 \mathbb{C} 上の n 次元ベクトル空間の中の m 次元部分空間達からなる集合とする. この $\mathcal{G}_{m,n}$ を複素 Grassmann 空間という. $\mathcal{G}_{m,n}$ にはユニタリ群 $U(n)$ が自然に作用していて, $\mathbf{a} \in \mathcal{G}_{m,n}$ の固定部分群は $U(m) \times U(n-m)$ と同型である. したがって $\mathcal{G}_{m,n}$ は等質空間として $U(n)/(U(m) \times U(n-m))$ と表すことが出来る. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{G}_{m,n}$ に対して **principal angles** という m 個の実数の組 $y(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ が次のようにして決まる: $\cos \theta_1 = \max\{(a_1, b_1) \mid a_1 \in \mathbf{a}, b_1 \in \mathbf{b}\}$, $\cos \theta_2 = \max\{(a_2, b_2) \mid a_2 \in \mathbf{a} \cap \langle a_1 \rangle^\perp, b_2 \in \mathbf{b} \cap \langle b_1 \rangle^\perp\}$, $\cos \theta_3 = \max\{(a_3, b_3) \mid a_3 \in \mathbf{a} \cap \langle a_1, a_2 \rangle^\perp, b_3 \in \mathbf{b} \cap \langle b_1, b_2 \rangle^\perp\}$ のようにして $\cos \theta_m$ まで求め $y_i = \cos^2 \theta_i$ とする. $\mathcal{G}_{m,n} \times \mathcal{G}_{m,n}$ の $U(n)$ -作用による軌道分解したとき $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$ と $\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2$ が同じ軌道にあるための必要十分条件はこれらの principal angles $y(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$ と $y(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ が一致することである.

m 変数 Y_1, \dots, Y_m の対称式から生成される環を $\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m]^{\mathfrak{S}_m}$ であらわす. このとき $\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m]^{\mathfrak{S}_m}$ は $\mathcal{G}_{m,n} \times \mathcal{G}_{m,n}$ 上の $U(n)$ -不変な関数達の集合と同型である.

非負整数の組 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ で $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$ を満たすものを **partition** という. partition μ に対して $\text{len}(\mu) = |\{i \mid \mu_i \neq 0\}|$, $|\mu| = \sum_{i \geq 1} \mu_i$ とする. ここで $U(n)$ の既約表現達は partition で添え字付けられていて, 特に $L^2(\mathcal{G}_{m,n})$ の既約表現分解を $\bigoplus_{\mu} H_{\mu}(\mathcal{G}_{m,n})$ と表すことにすると partition μ は $\text{len}(\mu) \leq m$ であるもの全体を動く. このとき $L^2(\mathcal{G}_{m,n})$ には内積 $\langle f, g \rangle = \int_{\mathcal{G}_{m,n}} f(\mathbf{a}) \overline{g(\mathbf{a})} d\mathbf{a}$ が与えられている. 各既約表現 $H_{\mu}(\mathcal{G}_{m,n})$ に対して $\mathcal{G}_{m,n} \times \mathcal{G}_{m,n}$ 上の関数 $Z_{\mu}(\cdot, \cdot)$ で principal angles にしか依らず, 更に

$$\langle Z_{\mu}(\mathbf{a}, \cdot), f \rangle = f(\mathbf{a}) \text{ for all } \mathbf{a} \in \mathcal{G}_{m,n}, f \in H_{\mu}(\mathcal{G}_{m,n})$$

を満たすものが一意に定まる. このとき $Z_{\mu}(\mathbf{a}, \cdot) \in H_{\mu}(\mathcal{G}_{m,n})$ であり, Z_{μ} を $H_{\mu}(\mathcal{G}_{m,n})$ の帯球関数という.

$$H_t(\mathcal{G}_{m,n}) = \bigoplus_{\substack{\mu : \text{partition} \\ \text{len}(\mu) \leq m \\ |\mu| \leq t}} H_{\mu}(\mathcal{G}_{m,n})$$

とする.

定義 3.1. X を $\mathcal{G}_{m,n}$ の空でない有限集合とする.

- (1) $F \in \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m]^{\mathfrak{S}_m}$ を $F(1, 1, \dots, 1) \neq 0$ であるものとする. このとき X の中の異なる 2 点 \mathbf{a}, \mathbf{b} に対して $F(y(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = 0$ がなりたつとき X を F -コードであるという.
- (2) 任意の $f \in H_t(\mathcal{G}_{m,n})$ に対して, 等式

$$\int_{\mathcal{G}_{m,n}} f(\mathbf{a}) d\mu(\mathbf{a}) = \frac{1}{|X|} \sum_{\mathbf{a} \in X} f(\mathbf{a})$$

が成り立つときに X を t デザインであるという.

このようにして $\mathcal{G}_{m,n}$ 上にコードとデザインを考えることが出来る. このとき球面の場合と同様に以下の定理で述べるようなコードとデザインの Fisher 型の不等式が証明されている.

定理 3.2 (cf. [Roy09]). $F \in \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m]^{\mathfrak{S}_m}$ を $F(1, 1, \dots, 1) \neq 0$ かつ $\deg F = s$ であるものとする. X を $\mathcal{G}_{m,n}$ の F -コードとすると

$$|X| \leq \dim_{\mathbb{C}} H_s(\mathcal{G}_{m,n})$$

が成り立つ.

定理 3.3 (cf. [Roy09]). X を $\mathcal{G}_{m,n}$ の $2e$ -デザインとすると

$$|X| \geq \dim_{\mathbb{C}} H_e(\mathcal{G}_{m,n})$$

が成り立つ.

球面の場合と同様に定理 3.3 の不等式の等号を満たすようなデザインを堅いデザインという. この堅いデザインに関して得られた結果を以下で与える.

定理 3.4. X を $\mathcal{G}_{m,n}$ 上の F -コードかつ t -デザインとする. ただし $\deg F = s$ とする.

- (1) このとき $t \leq 2s$ が成り立つ. 更に $t = 2s$ のとき, またその時に限り X は堅い $2s$ -デザインなる.
- (2) この堅い $2s$ -デザインに付随する F は $F = \sum_{\substack{\mu : \text{partition} \\ \text{len}(\mu) \leq m \\ |\mu| \leq s}} Z_{\mu}$ となる.

上記の結果は球面の堅いデザインを分類する際に使われてきた結果の類似である. 詳しく言うと堅いデザインという条件があるとその有限集合の内積の値が上の結果から決まる. しかし $\mathcal{G}_{m,n}$ の場合は球面の場合と違ってこの結果からだけでは principal angles の値が決定されない. 今後はこの問題を解決して堅いデザインを完全に分類することが重要な課題になる.

参考文献

- [坂内-坂内] 坂内英一, 坂内悦子, 『球面上の代数的組合せ理論』, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1999).
- [BD79] Bannai, E., and Damerell, R. M., *Tight spherical designs. I*, J. Math. Soc. Japan, **31** (1979), no. 1, 199–207.
- [BD80] Bannai, E., and Damerell, R. M., *Tight spherical designs. II*, J. London Math. Soc. (2), **21** (1980), no. 1, 13–30.
- [BH85] Bannai, E., and Hoggar, S. G., *On tight t -designs in compact symmetric spaces of rank one*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **61** (1985), no. 3, 78–82.
- [BI84] Bannai, E., and Ito, T., *Algebraic combinatorics. I*, The Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. (1984).
- [Big93] Biggs, N., *Algebraic graph theory*, Cambridge University Press (1993).
- [BCN89] Brouwer, A. E., Cohen, A. M., and Neumaier, A., *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag (1989).
- [DGS77] Delsarte, P., Goethals, J. M., and Seidel, J. J., *Spherical codes and designs*, Geometriae Dedicata, **6** (1977), no. 2, 363–388.
- [Roy09] Roy, A., *Bounds for codes and designs in complex subspaces*, J Algebr. Comb., **31** (2009), no. 1, 1–32.

On a vector partition function with negative weights

高倉 樹 (中央大学・理工学部)

1 序

ケーラー商として得られる空間のよいクラスとして、重複度多様体 (multiplicity variety) や多重ウェイト多様体 (multiple weight variety) と呼ばれる空間族が知られている。すなわち、 G をコンパクト・リー群、 $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ を G の余随伴軌道とすると、

$$(\mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_n) // G, \quad (\mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_n) // H, \quad (\mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_n) // T$$

の形で与えられる空間たちである。ここで、 H は G の閉部分群、 T は G の極大トーラスである。これらの空間のトポロジー・幾何・大域解析は非常に興味深い。特に、リーマン・ロッホの定理に関わる特性数やコホモロジー交叉積を系統的に考えると、以下に述べるような、負のウェイトをもつ vector partition function やその漸近挙動から定まる volume function の考察に自然に導かれる ([3], [4] 参照)。

一方、vector partition function や volume function 自体は、多方面からの動機に基づき様々な研究がなされており、その歴史は長い。(ただし、概ねにおいて、ウェイトを陽には持ち出さないか、それらがすべて正の場合のみが扱われている。) 実際、これらは凸体内の格子点の個数および凸体の体積の特別な場合になっている。そして、定義が比較的単純であるにもかかわらず、具体的な計算は難しいという特徴を持つ。

今回の考察の目標は、上記の空間のトポロジーや幾何への応用を念頭に置きつつ、ウェイトが負の場合も含めて vector partition function, volume function の明示公式を得ることにある。その際、Gel'fand-Kapranov-Zelevinsky (GKZ) 超幾何関数論の応用 [5] や、Brion-Vergne の公式 [1] が重要な役割を果たす。

2 Vector partition function と付随する volume function

$\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}^l$ を固定する。ただし、これらはある半空間に属すものと仮定する。 $Q = \sum_{i=1}^N \mathbb{Z}\alpha_i$, $Q_+ = \sum_{i=1}^N \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ と記す。

$v \in Q_+$ に対し、 $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 係数 1 次結合として v を表す方法の数を $P(v)$ とする。すなわち

$$P(v) := \#\{(x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N \mid x_1\alpha_1 + \dots + x_N\alpha_N = v\}$$

と定める。関数 $P : Q_+ \rightarrow \mathbb{Z}_0$ を vector partition function (ベクトル分配関数またはベクトル分割関数) とよぶ。 P の母関数は次で与えられる。

$$\begin{aligned} \sum_v P(v)e^v &= \frac{1}{\prod_{i=1}^N (1 - e^{\alpha_i})} \\ &= (1 + e^{\alpha_1} + e^{2\alpha_1} + \cdots) \cdots (1 + e^{\alpha_N} + e^{2\alpha_N} + \cdots). \end{aligned}$$

ただし、 $v \in Q_+$ に対し形式的なべき e^v を考え、積を $e^{v_1}e^{v_2} = e^{v_1+v_2}$ で定める。また $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし、 $P(k \cdot v)$ の $k \rightarrow \infty$ における漸近的な挙動に着目して、

$$V(v) := k \text{ の準多項式 } P(k \cdot v) \text{ の最高次の係数}$$

と定め、 asymptotic vector partition function あるいは volume function と呼ぶ。実際それは、凸体

$$\{(x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^N \mid x_1\alpha_1 + \cdots + x_N\alpha_N = v\}$$

の (然るべく正規化された測度に関する) 体積に一致する。なお、 $P(v)$ はこの凸体の格子点の数に他ならない。

さて、上記において実は $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ の中に同じものがあってもよい。そこで少し設定を変えて、はじめから $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ がそれぞれ m_1, \dots, m_N 個あると仮定する。 m_i たちをウェイトとよぶ。このとき、

$$P(v) = m_i \text{ 個の } \alpha_i \text{ たちの } \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ 係数 1 次結合として } v \text{ を表す方法の数} \quad (1.1)$$

であり、母関数は

$$\sum_v P(v)e^v = \frac{1}{\prod_{i=1}^N (1 - e^{\alpha_i})^{m_i}} \quad (1.2)$$

である。 $V(v)$ の定義も上と同様である。

さらに、 m_1, \dots, m_N の中に 0 以下のものがあるときも、式 (1.2) は意味をもつ。(一方、(1.1) は意味不明となる。) 以下では、この場合も含めて考える。

問題 2.1. • ウェイト m_1, \dots, m_N の中に負のものがあるときも含めて、 $P(v)$ および $V(v)$ を計算する手続きや公式を求めよ。特に、 $V(v)$ に対する「良い」明示的公式を求めよ。

- Gel'fand-Kapranov-Zelevinsky (GKZ) 超幾何関数論やその他の手法 (Jeffrey-Kirwan の留数公式や Brion-Vergne の公式など) を用いて、この問題にアプローチせよ。

3 GKZ 理論からのアプローチ

以下では、 $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ は \mathbb{R}^l の基底であり、 $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_1 + \cdots + \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_l$ ($i = l+1, \dots, N$) と仮定する。 $l \times (N-l)$ 行列 R を

$$(\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_N) = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)R$$

で定義する。さらに、 $i = 1, \dots, l$ に対し、 R の第 i 行を R_i とする。このとき、

$$j_1\alpha_1 + \cdots + j_N\alpha_N = v \iff j_i = -R_i^t(j_{l+1}, \dots, j_N) + p_i \quad (i = 1, \dots, l)$$

である。

定理 3.1. p_1, \dots, p_l を generic な正整数とし、 $m_1 + \dots + m_N - l > 0$ と仮定する。 m_1, \dots, m_l がすべて正のとき、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} & V(p_1\alpha_1 + \dots + p_l\alpha_l) \\ &= \int_D \frac{(p_1 - R_1^t(t_{l+1}, \dots, t_N))^{m_1-1}}{(m_1 - 1)!} \dots \frac{(p_l - R_l^t(t_{l+1}, \dots, t_N))^{m_l-1}}{(m_l - 1)!} \\ & \quad \times \frac{(t_{l+1})^{m_{l+1}-1}}{(m_{l+1} - 1)!} \dots \frac{(t_N)^{m_N-1}}{(m_N - 1)!} dt_{l+1} \dots dt_N \end{aligned}$$

ただし、 D は不等式

$$t_{l+1} \geq 0, \dots, t_N \geq 0, \quad R_1^t(t_{l+1}, \dots, t_N) \leq p_1, \dots, R_l^t(t_{l+1}, \dots, t_N) \leq p_l$$

をみたす $(t_{l+1}, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^{N-l}$ 全体からなる凸多面体とする。また、 $m < 0$ のとき

$$\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} := \delta_{t=0}^{(m)} = \text{「}t=0 \text{ に台をもつデルタ関数の } m \text{ 階導関数」}$$

と定める。

この積分は、GKZ 超幾何関数の Euler 型積分表示の特別な場合とみなせる。したがって、

系 3.2. 上記の定理の仮定の下、Volume function with weights の値は、GKZ 超幾何関数の特殊値として表される。

なお、一般の場合、すなわち m_1, \dots, m_l の中に非正のものがある場合にも、まったく同じ結論が成り立つと予想している。さらに、GKZ 超幾何関数論を用いて（あるいは発展させて）上記の積分を具体的に計算することができると期待している。§5 で、 A_2 型の場合の例を与える。

4 別のアプローチ

前節とは別のアプローチの一つとして、Brion-Vergne の公式 [1] がある。それは、Jeffrey-Kirwan の留数公式 [2] を vector partition function や volume function に対する明示公式として定式化し直したものである。volume function に対しては、

$$V(p_1\alpha_1 + \dots + p_l\alpha_l) = p_1, \dots, p_l \text{ と見かけ上のパラメータ } y_1, \dots, y_N \text{ の有理式}$$

という等式になる。右辺は p_1, \dots, p_l の多項式であり、実際には y_1, \dots, y_N によらない。次節で A_2 型の場合の例を紹介するが、そのときには、負のウェイトがある場合も含めて正しい。現時点では、この公式と GKZ 超幾何関数論との関連は（少なくとも筆者には）不明であるが、非常に興味深い問題である。

5 例： A_2 型のとき

\mathbb{R}^2 の3つのベクトル $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ のウェイトをそれぞれ m_1, m_2, m_3 とする。 $v = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 \in Q_+$ について、 $p_1 > p_2 > 0$ と仮定し、volume function $V(p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2)$ の計算例を2種類与える。まず、定理 3.1 を用いると次を得る。

定理 5.1.

$$\begin{aligned}
& V(p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2) \\
&= \int_0^{p_2} \frac{(p_1 - t)^{m_1-1}}{(m_1 - 1)!} \frac{(p_2 - t)^{m_2-1}}{(m_2 - 1)!} \frac{t^{m_3-1}}{(m_2 - 1)!} \\
&= \sum_{i=0}^{m_1-1} \frac{(m_2 + i - 1)!}{(m_2 - 1)!(m_1 - i - 1)!i!(m_2 + m_3 + i - 1)!} (p_1 - p_2)^{m_1-1-i} p_2^{m_2+m_3+i-1}
\end{aligned}$$

m_1, m_2, m_3 の中に負のものがある場合にも、多項式としての最終的な表示は正しい。

§1 で述べた multiplicity variety のトポロジーへの応用については、[3] を参照のこと。次に、Brion-Vergne の公式の精密化として次を得る。

定理 5.2. $M = m_1 + m_2 + m_3$ とおく。

$$\begin{aligned}
& V(p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2) \\
&= \frac{1}{(M - 2)!} \left\{ \frac{1}{(m_1 - 1)!(m_2 - 1)!} \frac{\partial^{m_1-1}}{\partial y_1^{m_1-1}} \frac{\partial^{m_2-1}}{\partial y_2^{m_2-1}} \left(\frac{(p_1 y_1 + p_2 y_2)^{M-2}}{(-y_3 + y_1 + y_2)^{m_3}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(m_1 - 1)!(m_3 - 1)!} \frac{\partial^{m_1-1}}{\partial y_1^{m_1-1}} \frac{\partial^{m_3-1}}{\partial y_2^{m_3-1}} \left(\frac{((p_1 - p_2)y_1 + p_2 y_3)^{M-2}}{(-y_2 - y_1 + y_3)^{m_2}} \right) \right\}
\end{aligned}$$

なお、上式は m_1, m_2, m_3 の中に非正のものがあっても正しい。ただし $m < 0$ のときは $\frac{1}{(m - 1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}} = 0$ と定める。

また、 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_4\}$ が B_2 型のルート系ときにも、それぞれ同様の公式が存在する。さらに、 A_2, B_2 型に限らず、一般の場合にも同様の公式が存在すると予想される。これらの性質がより明確になれば、multiplicity variety や weight variety のトポロジーへの応用が豊富に得られると期待される。

References

- [1] M. Brion and M. Vergne, *Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes*, J. Amer. Math. Soc., **10** (1997), 797–833.
- [2] L. Jeffrey and F. C. Kirwan, *Localization for non-abelian group actions*, Topology **34** (1995), 291–327.
- [3] T. Suzuki and T. Takakura, *Symplectic volumes of certain symplectic quotients associated with the special unitary group of degree three*, Tokyo J. Math., **31** (2008), 1–26.
- [4] T. Suzuki and T. Takakura, *Asymptotic dimension of invariant subspace in tensor product representation of compact Lie group*, J. Math. Soc. Japan, **61** (2009), 921–969.
- [5] T. Takakura, *On asymptotic partition functions for root systems*, In: Toric Topology (eds. M. Harada, Y. Karshon, M. Masuda, and T. Panov), Contemp. Math., **460**, Amer. Math. Soc., 2008, pp. 339–348.

葉層多様体における 横断的 Calabi-Yau 構造のモジュライ空間

森山 貴之 (京都大学数理解析研究所)

1 序

多様体 M 上において接束 TM の部分束 $F \subset TM$ が完全積分可能の時、 M の各点を通る積分多様体が存在し、この部分多様体を葉と言ひ、その族が葉層構造 \mathcal{F} であった。横断的幾何構造とは各葉に対して横断的な方向の幾何構造の事である。よつて、横断的幾何構造とはその葉の空間 (多様体を同じ葉の点は同一視するといふ同値関係で割つた商空間) 上の幾何構造と考える事が出来る。しかし、一般にこの葉空間は大変複雑な空間であり、ハウストルフでない場合もある。横断的幾何構造の正確な定義は多様体の局所座標の横断的な方向の貼り合わせにより定義できる。しかし、ここではテンソルによる特徴付けを採用する。つまり、完全積分可能な分布 $F \subset TM$ に対し、横断的な幾何構造とは商束 $Q = TM/F$ (から作られる束) へのベーシック (各葉に沿つて一定) な切断で、ある可積分性を持つものとして捉える。例えば横断的正則構造とは商束 Q の複素構造 $J \in \Gamma(\text{End}(Q))$ でベーシックなもの (で拡張されたナイエンハウステンソルが消えているもの) により与えられる。更にこの J と両立するような、商束 Q の symplectic 構造 $\omega \in \Gamma(\wedge^2 Q^*)$ でベーシックな閉微分形式になるものが横断的ケーラー構造を定める。ここでの可積分性は「 d -閉性」である。

さて、横断的正則構造を持つ葉層構造の変形は小平・スペンサーによる多重葉層構造の変形理論 [6] を基に数多くの研究がなされてきた [1] [4] [3]。一方、幾何構造を微分形式で捉え変形を考えるといふ後藤の変形理論を基に横断的な幾何構造をベーシックな微分形式として捉え、変形理論を考える事が出来る。そして、いくつかの横断的な幾何構造の変形空間の非障害性や一般化されたモーザーの安定性定理が示せる [7]。本講演では横断的カラビ・ヤウ構造に焦点を当て、その変形空間をある同値類で割つた空間 (モジュライ空間) の構造についての研究結果を紹介する。

2 横断的 Calabi-Yau 構造

多様体 M を $(2n + \ell)$ 次元、葉層構造 \mathcal{F} を定めるベクトル束 $F \subset TM$ をランク ℓ とする。葉層多様体 (M, \mathcal{F}) 上の p 次微分形式 $\phi \in \wedge^p$ が

$$i(v)\omega = 0, \quad L_v\omega = 0, \quad \forall v \in \Gamma(F)$$

を満たす時、 ϕ はベーシックであるといふ。初めの条件から ϕ は $\wedge^p Q^*$ の切断になり、2つ目の条件は葉に添つて一定である事を意味する。

葉層多様体 (M, \mathcal{F}) 上の実2次微分形式 $\omega \in \wedge^2$ が $\omega^n \neq 0$ を満たす閉ベーシック形式であるときに**横断的 symplectic 構造**という。また、複素 n 次微分形式 $\Omega \in \wedge^n \otimes \mathbb{C}$ が以下を満たす閉ベーシック形式 Ω であるときに**横断的 $SL_n(\mathbb{C})$ 構造**であるという：

$$Q \otimes \mathbb{C} = \text{Ker } \Omega / F \oplus \overline{\text{Ker } \Omega / F}$$

ここで $\text{Ker } \Omega = \{v \in TM \otimes \mathbb{C} \mid i_v \Omega = 0\}$. このとき、横断的 $SL_n(\mathbb{C})$ 構造 Ω から Q の複素構造 $J_\Omega \in \Gamma(\text{End}(Q))$ が定義でき、 Ω を $(n, 0)$ ベーシック形式とするような横断的正則構造を定める。

定義 1 (M, \mathcal{F}) 上の横断的 $SL_n(\mathbb{C})$ 構造 Ω と横断的 symplectic 構造 ω に対し、その組 (Ω, ω) が**横断的 Calabi-Yau 構造**であるとは、以下を満たす時に言う。

$$\begin{aligned} \Omega \wedge \omega &= 0, \\ \Omega \wedge \bar{\Omega} &= c_n \omega^n \neq 0, \\ \omega(\cdot, J_\Omega \cdot) &\text{ is positive definite on } Q \end{aligned}$$

ここで $c_n = \frac{1}{n!} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{-1}}\right)^n$.

この時、 $\omega(\cdot, J_\Omega \cdot)$ は Q の計量を定め、更にベクトル束 $\otimes^2 Q^*$ のベーシックな切断となる。このような構造を**横断的リーマン構造**という。

3 主定理

(M, \mathcal{F}) 上の横断的 Calabi-Yau 構造全体の空間を $\widetilde{\mathfrak{M}}_{CY}(M, \mathcal{F})$ とし、 $\text{Diff}(M, \mathcal{F})$ を葉層構造を保つ微分同相群とする。この時、 $\text{Diff}(M, \mathcal{F})$ は微分形式の引き戻しにより $\widetilde{\mathfrak{M}}_{CY}(M, \mathcal{F})$ に作用する。モジュライ空間 $\mathfrak{M}_{CY}(M, \mathcal{F})$ を

$$\mathfrak{M}_{CY}(M, \mathcal{F}) = \widetilde{\mathfrak{M}}_{CY}(M, \mathcal{F}) / \text{Diff}_0(M, \mathcal{F})$$

として定義する。ここで $\text{Diff}_0(M, \mathcal{F})$ は $\text{Diff}(M, \mathcal{F})$ の単位元の連結成分とする。葉層構造を考えない場合、つまり、カラビ・ヤウ構造の場合、そのモジュライ空間はハウスドルフになる事が知られている [5]。横断的カラビ・ヤウ構造の場合には葉層構造に次のような条件を課す。

定義 2 \mathcal{F} が **taut 葉層**であるとは、各葉が極小部分多様体となるようなリーマン計量が存在する葉層構造の事である。

我々の考えているのは横断的は方向の構造であり、葉層の方向には何の構造も考えていなかった。例えば横断的リーマン構造は横断的な方向のみの計量や体積要素を与える。しかし、多様体全体の積分を考える場合には葉層方向の体積要素を指定する必要がある。この taut 葉層であるという条件は葉層方向の“良い”体積要素の存在を保証してくれる。

そして、次が本講演の主定理である。

定理 1 [7]. M をコンパクト多様体とし、 \mathcal{F} を *taut* 葉層とする。この時、モジュライ空間 $\mathfrak{M}_{CY}(M, \mathcal{F})$ は滑らかな多様体（特にハウスドルフ）になる。

証明の概略 まず、座標の貼り合わせが滑らかになるのは横断的カラビ・ヤウ構造から作られる変形のコンプレックスが（横断的）楕円型になるという事から従う。次にハウスドルフ性であるが、これは次の定理からの帰結である。

命題 1 [7]. 横断的リーマン構造全体の空間 $\mathfrak{M}_{met}^s(M, \mathcal{F})$ に $\text{Diff}_0^{s+1}(M, \mathcal{F})$ 不変なリーマン計量が存在する。

この計量から $\mathfrak{M}_{met}^s(M, \mathcal{F})$ 上に距離が構成でき、横断的カラビ・ヤウ構造は横断的リーマン構造を誘導することから、この距離が横断的カラビ・ヤウ構造のモジュライ空間 $\mathfrak{M}_{CY}(M, \mathcal{F})$ の距離を誘導する。これにより $\mathfrak{M}_{CY}(M, \mathcal{F})$ が距離空間（特にハウスドルフ空間）である事が分かる。□

命題についての補足 上の命題において上付き添え字は完備化に関するものであるが、今考えている状況は（横断的に）調和な対象であり、このような場合、結論が完備化やその取り方に寄らない事等は普通は省略する（できる）。しかし、今考えている状況は横断的調和であり、調和的ではない。ただ、解析的手法が横断的な設定で上手くいくという事がエルカチ [2] により与えられている事をここで言及しておきたい。

又、 $\mathfrak{M}_{met}^s(M, \mathcal{F})$ 上の計量は本質的には M 上の積分を用いて構成される。*taut* 葉層の所で説明した通り、この積分に、そして $\mathfrak{M}_{met}^s(M, \mathcal{F})$ 上の計量の構成に *taut* 性を必要とする。

4 例

横断的カラビ・ヤウ構造を持つ葉層構造の例としては

- トーラスの線形葉層
- (ヌル) 佐々木多様体の特殊葉層

等がある。これらの例については横断的カラビ・ヤウ構造のモジュライ空間の次元も計算する事が出来る。本講演ではこの様な例を説明しつつ、モジュライ空間の次元やその計算方法について重点的に話していくつもりである。特に 5 次元ヌル佐々木多様体の場合にはモジュライ空間の次元は多様体のベッチ数により与えられる事が分かる。

参考文献

- [1] T. Duchamp and M. Kalka, *Deformation theory for holomorphic foliations*, J. Diff. Geom. **14** (1979) 317-337.

- [2] A. El Kacimi-Alaoui, *Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications*, Compositio Math. **73** (1990) 57-106.
- [3] J. Girbau, A. Haefliger and D. Sundararaman, *On deformations of transversely holomorphic foliations*, J. Reine Angew. Math. **345** (1983) 122-147.
- [4] X. Gomez-Mont, *Transversal holomorphic structures*, J. Diff. Geom. **15** (1980) 161-186.
- [5] R. Goto, *Moduli spaces of topological calibrations, Calabi-Yau, hyperkähler, G_2 and Spin(7) structures*, Inter. J. Math. **15**, No.3 (2004) 211–257.
- [6] K. Kodaira and D. C. Spencer, *Multifoliate structures*, Ann. Math. **74**, (1961) 52-100.
- [7] T. Moriyama, *Deformations of transverse Calabi-Yau structures on foliated manifolds*, to appear.
- [8] T. Moriyama, *The moduli space of transverse Calabi-Yau structures on foliated manifolds*, to appear.

TORUS FIBRATIONS AND LOCALIZATION OF INDEX

吉田尚彦 (明治大学先端数理科学インスティテュート)

ABSTRACT. Dirac 型作用素の指数の局所化に関する古田幹雄氏 (東京大学), 藤田玄氏 (学習院大学) との共同研究 [4] について, 藤田氏が第 55 回幾何学シンポジウムで講演を行った [3]. 今回の講演では, その後の進展 [5] について説明する. 主な内容は以下の通りである.

- (1) Witten が [12] で用いた作用素の摂動のアイデアに基づき, 開多様体上の Dirac 型作用素に対して指数を定式化する枠組みを与える.
- (2) その応用として, 前量子化束をもつ 4 次元局所トーリック Lagrange ファイバー束に対して, spin^c Dirac 作用素の指数が特異, 非特異両方の BS ファイバーの個数に等しいことを示す.

1. はじめに

N を正の整数, $S_N^5 = \{(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \mid \|z\|^2 = N\}$ とする. S_N^5 上の接続付き複素直線束

$$\left(S_N^5 \times \mathbb{C}, \nabla = d + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 (z_i d\bar{z}_i - \bar{z}_i dz_i) \right) \rightarrow S_N^5$$

とその上の S^1 作用

$$(1.1) \quad g(z_0, z_1, z_2, w) = (gz_0, gz_1, gz_2, g^N w) \quad g \in S^1, (z_0, z_1, z_2, w) \in S_N^5 \times \mathbb{C}$$

を考える. (1.1) は接続 ∇ を保つ自由な S^1 作用であり, その商空間 S_N^5/S^1 は複素射影空間 $\mathbb{C}P^2$, $(S_N^5 \times \mathbb{C})/S^1$ は $\mathbb{C}P^2$ 上の超平面束の N 回テンソル (以下, これを L で表す) と自然に同一視される. さらに, ∇ は L の接続で曲率が $-2\pi\sqrt{-1}N$ 倍の Fubini-Study 形式となるようなものを誘導する.

$\mu: \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を運動量写像

$$\mu([z_0 : z_1 : z_2]) = \left(\frac{N|z_1|^2}{\|z\|^2}, \frac{N|z_2|^2}{\|z\|^2} \right)$$

とする. このとき, Danilov によって次が知られている¹.

定理 1.1 (Danilov [2]). L の正則切断の空間の次元は, μ の像に含まれる整数格子点の個数と一致する, すなわち,

$$(1.2) \quad \dim H^0(\mathbb{C}P^2; \mathcal{O}_L) = \#\mu(\mathbb{C}P^2) \cap \mathbb{Z}^2.$$

実際, 各 $k = (k_1, k_2) \in \mu(\mathbb{C}P^2) \cap \mathbb{Z}^2 = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq k_1, k_2, k_1 + k_2 \leq N\}$ に対して, 切断 $s_k \in \Gamma(L)$ を

$$s_k([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0 : z_1 : z_2, z_0^{N-k_1-k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}]$$

と定めると, s_k 達が $H^0(\mathbb{C}P^2; \mathcal{O}_L)$ の基底を与える.

ここで, (1.2) の左辺は高次のコホモロジー $H^i(\mathbb{C}P^2; \mathcal{O}_L)$ ($0 < i$) が消えていることから, L 係数 Dolbeault 作用素

$$\sqrt{2}(\bar{\partial} \otimes L - \bar{\partial}^* \otimes L) : \Gamma(\wedge^{0,\bullet} T^* \mathbb{C}P^2 \otimes_{\mathbb{C}} L) \rightarrow \Gamma(\wedge^{0,\bullet} T^* \mathbb{C}P^2 \otimes_{\mathbb{C}} L)$$

の指数に等しい. 一方, $k \in \mu(\mathbb{C}P^2) \cap \mathbb{Z}^2$ であることと $(L, \nabla)|_{\mu^{-1}(k)}$ に非自明な大域的平行切断が存在することが同値であることも分かる. このようなファイバーを **Bohr-Sommerfeld ファイバー** と呼ぶ. このことから, 定理 1.1 は, Dolbeault 作用素の指数の μ の Bohr-Sommerfeld ファイバーへの局所化定理と捉えることができる.

このような指数の局所化現象は, Lagrange ファイバー束の場合 [1], 複素旗多様体上の Gelfand-Cetlin 系の場合 [8] や Riemann 面上の平坦 $SU(2)$ 束のモジュライ上の Goldman による完全可積分系の場合 [9], さらに [7, 10, 11] などでも成り立つことが知られている.

量子力学的な観点からは, Dolbeault 作用素 (或は spin^c Dirac 作用素) の指数, Bohr-Sommerfeld ファイバーの個数はそれぞれ, spin^c 量子化, 実偏極を用いた幾何学的量子化と呼ばれる二通りの量子化で得られるヒルベルト空間の次元に対応する. これら二通りの量子化が等価であるかは基本的かつ重要な問題であるが, 未解決である.

takahiko@math.meiji.ac.jp.

Partly supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (B) 22740046, and Fujyukai Foundation.

¹Danilov は, 一般の非特異射影的トーリック多様体についてこの定理が成り立つことを示している.

これら一連の局所化現象のメカニズムを解明するため、講演者は古田幹雄氏（東大数理）藤田玄氏（学習院大学）と共に、Witten が [12] で用いた作用素の摂動に基づく指数の局所化の観点から共同研究を行い、[4] では acyclic polarization の概念を導入し、エンドに acyclic polarization を持つ開多様体上の Dirac 型作用素に対して指数を定式化し、その指数に対して局所化定理を得た。その応用として、前量子化束をもつ特異 Lagrange ファイバー束に対して、 spin^c Dirac 作用素の指数が非特異 BS ファイバーの個数と特異ファイバーからの寄与で表せることを示した。特に、(特異ファイバーを持たない) Lagrange ファイバー束については spin^c Dirac 作用素の指数が非特異 BS ファイバーの個数と一致することが Andersen [1] によって示されているが、この等式は我々の局所化定理の系としても得られる。

しかし、Lagrange ファイバー束が特異ファイバーを持つ場合、[4] で得られた指数の局所化定理では特異ファイバー全体の和集合の連結成分ごとにしか寄与をとらえることができず、前説で述べた [2, 8, 9] などの結果を再現できない。そこで、[5] では acyclic polarization を一般化した acyclic compatible system の概

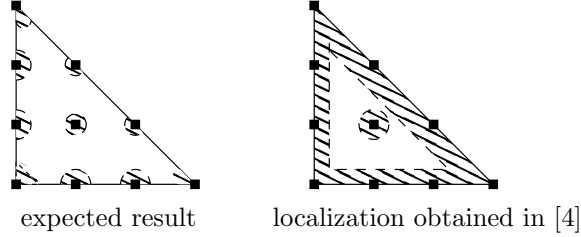


FIGURE 1. 期待される局所化と [4] で得られた局所化 (CP^2 の場合)

念を導入し、[4] の結果を改良した。その結果、特異ファイバーの近傍における局所化の精度を向上させることができ、一部の特異 Lagrange ファイバー束については、 spin^c Dirac 作用素の指数が特異、非特異両方の BS ファイバーの個数に等しいことが示せた。また、その指数についての積公式も得られた。

さらに、[6] では [4, 5] で得られた結果の同変版、及びその Guillemin-Sternberg による量子化予想への応用について述べる予定である。

この講演では、[5] の結果について説明する。

2. 主結果

2.1. 局所指数. はじめに、acyclic compatible system の概念を導入する。acyclic compatible system には、オービフォールド版などの変種があるが、ここでは、簡単な場合を述べる。その後、主定理を述べる。

定義 2.1. M を多様体とする。 M 上の **compatible fibration** とは次を満たすデータ $\{\pi_\alpha: V_\alpha \rightarrow U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ のこと。

- (1) $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ は M の有限開被覆。
- (2) U_α は多様体で $\pi_\alpha: V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ は $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{k_\alpha}$ をファイバーとするファイバー束。階数 k_α は α ごとにかわってよい。
- (3) $\pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta)) = \pi_\beta^{-1}(\pi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)) = V_\alpha \cap V_\beta$ 。
- (4) $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ のとき、各点 $x \in V_\alpha \cap V_\beta$ に対して、

$$\pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(x)) \supset \pi_\beta^{-1}(\pi_\beta(x)), \pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(x)) \subset \pi_\beta^{-1}(\pi_\beta(x))$$

のどちらかが成り立つ。さらに前者の場合には、ファイバー束 $\pi_{\alpha\beta}: \pi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \pi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta)$ で $\pi_\alpha = \pi_{\alpha\beta} \circ \pi_\beta$ となるものが存在する。後者の場合も同様。

以下では簡単のため、compatible fibration を $\{\pi_\alpha\}$ と表すことにする。

定義 2.2. $\{\pi_\alpha\}$ を M 上の compatible fibration とする。 $\{\pi_\alpha\}$ に対して、 M の開集合 C が **admissible** であるとは、各 $\alpha \in A$ に対して

$$\pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(C \cap V_\alpha)) = C \cap V_\alpha$$

が成り立つときをいう。

つぎに、 (M, g) を Riemann 多様体、 $\{\pi_\alpha\}$ を M 上の compatible fibration とする。各 U_α には Riemann 計量があり、 π_α はこの Riemann 計量に関して Riemannian submersion であると仮定する。 $Cl(TM)$ を Clifford 代数束とする。 (W, c) を (M, g) 上の \mathbb{Z}_2 次数付き $Cl(TM)$ 加群束とする。すなわち、 W は二つの Hermite ベクトル束 W^0, W^1 の直和 $W = W^0 \oplus W^1$ であり、 c は次を満たす \mathbb{R} -線型写像 $c: TM \rightarrow \text{End } W$ とする。

- (1) 任意の元 $u \in TM$ に対して、 $c(u)$ は W^i の元を W^{i+1} の元へ移す。

(2) 任意の元 $u \in TM$, $w_1, w_2 \in W$ に対して,

$$\langle c(u)w_1, w_2 \rangle_W = -\langle w_1, c(u)w_2 \rangle_W.$$

ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ は W の Hermite 計量.

(3) 任意の元 $u, v \in TM$ に対して,

$$c(u) \circ c(v) + c(v) \circ c(u) = -2g(u, v) \text{id}_W.$$

このとき,

定義 2.3. compatible system とは次を満たすデータ $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ のこと.

(1) $D_\alpha: \Gamma(W|_{V_\alpha}) \rightarrow \Gamma(W|_{V_\alpha})$ は次数をずらす形式的自己共役な 1 階線形微分作用素.

(2) D_α の主表象 $\sigma(D_\alpha)$ は

$$\sigma(D_\alpha) = c \circ p_\alpha \circ \iota_\alpha^*: T^*V_\alpha \rightarrow \text{End}(W|_{V_\alpha})$$

で与えられる. ここで, $\iota_\alpha: T[\pi_\alpha] \rightarrow TV_\alpha$ は π_α のファイバーに沿った接束 $T[\pi_\alpha]$ の TV_α への自然な包含写像, $p_\alpha: T^*[\pi_\alpha] \rightarrow T[\pi_\alpha]$ は Riemann 計量 g が誘導する同型. 特に, D_α は π_α のファイバー方向の微分のみを含む.

(3) 各 $b \in U_\alpha$ と $u \in T_bU_\alpha$ に対して, $\tilde{u} \in \Gamma(TV_\alpha|_{\pi_\alpha^{-1}(b)})$ を g に関する u の horizontal lift とする. \tilde{u} は $\Gamma(W|_{\pi_\alpha^{-1}(b)})$ に Clifford 積 $c(\tilde{u})$ で作用する. このとき, 全ての $b \in U_\alpha$ と $u \in T_bU_\alpha$ に対して, D_α と $c(\tilde{u})$ は反可換, すなわち,

$$D_\alpha \circ c(\tilde{u}) + c(\tilde{u}) \circ D_\alpha = 0.$$

(4) 各 $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ 上, $D_\alpha \circ D_\beta + D_\beta \circ D_\alpha$ は小さい方のファイバーに沿った微分作用素.

定義 2.4. compatible system $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が **acyclic** であるとは

(1) 各 $\alpha \in A$ と $b \in U_\alpha$ に対して, $\ker(D_\alpha|_{\pi_\alpha^{-1}(b)}) = 0$,

(2) 各 $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ 上, $D_\alpha \circ D_\beta + D_\beta \circ D_\alpha$ は非負の作用素, すなわち,

$$(2.1) \quad \int_M \langle (D_\alpha \circ D_\beta + D_\beta \circ D_\alpha)s, s \rangle_W \text{vol} \geq 0 \quad \forall s \in \Gamma(W|_{V_\alpha \cap V_\beta})$$

であるときをいう.

次が主定理である.

定理 2.5 ([4, 5]). (M, g) を Riemann 多様体, (W, c) を (M, g) 上の \mathbb{Z}_2 次数付き Clifford 加群束, V を M の開集合で $M \setminus V$ がコンパクトなものとする. $\{\pi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を V 上の compatible system で, 各 U_α には Riemann 計量があり, π_α はこの Riemann 計量に関して Riemannian submersion であるとする. $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を acyclic compatible system とする. このとき, これらのデータに依存する整数 $\text{ind}(M, V) = \text{ind}(M, W, V, \{\pi_\alpha\}, \{D_\alpha\}) \in \mathbb{Z}$ で次の性質を満たすものが存在する.

(1) $\text{ind}(M, V)$ はデータの連続変形で不変.

(2) M が閉ならば, $\text{ind}(M, V)$ は W 上の Dirac 型作用素²の指数と等しい.

(3) M' を $M \setminus V$ の admissible 開近傍とすると

$$\text{ind}(M, V) = \text{ind}(M', M' \cap V) \quad (\text{切除性}).$$

(4) V' を V の admissible 開集合で $M \setminus V'$ がコンパクトであるとする

$$\text{ind}(M, V) = \text{ind}(M, V').$$

(5) $M = M_1 \sqcup M_2$ とすると

$$\text{ind}(M, V) = \text{ind}(M_1, M_1 \cap V) + \text{ind}(M_2, M_2 \cap V) \quad (\text{和公式}).$$

注 2.6. (1) $M = V$ のとき,

$$(2.2) \quad \text{ind}(M, V) = 0 \quad (\text{消滅性})$$

も成り立つ. なぜならば, (5) において $M = M \sqcup \emptyset$ とすると, $\text{ind}(\emptyset, \emptyset) = 0$. よって, $M = V$ より, (3) において $M' = \emptyset$ とすると, $\text{ind}(M, V) = 0$. 実際には, はじめに (2.2) を示し, それを用いて定理 2.5 を証明する.

(2) $\text{ind}(M, V)$ について積公式も成り立つ. 一番簡単な場合を以下に述べる. $(M_i, W_i, V_i, \{\pi_{i,\alpha}\}, \{D_{i,\alpha}\})$ を定理 2.5 の条件を満たす二通りのデータとする. このとき, 次が成り立つ

$$\text{ind}((M_1, V_1) \times (M_2, V_2)) = \text{ind}(M_1, V_1) \text{ind}(M_2, V_2).$$

但し, ここで述べた compatible fibration の定義 2.1 は積に関して閉じていないので, 積に関して閉じるよう定義を一般化する必要がある. 一般化された定義については, [5] を参照されたい.

²次数をずらす形式的自己共役な 1 階線形微分作用素で主表象が c と一致するものこと

定理 2.5 の系として、次の局所化定理が得られる。

系 2.7. 定理 2.5 の仮定のもと、さらに、 M は閉、かつ、 $M \setminus V$ は互いに共通部分を持たない開集合たち O_1, \dots, O_k で覆われているとする。このとき、 W 上の Dirac 型作用素 D について

$$\text{ind } D = \sum_{i=1}^k \text{ind}(O_i, O_i \cap V)$$

が成り立つ。

Proof.

$$\begin{aligned} \text{ind } D &= \text{ind}(M, V) \quad (\because \text{定理 2.5 (2)}) \\ &= \text{ind}(O_1 \sqcup \dots \sqcup O_k \cup V, V) \\ &= \text{ind}(O_1 \sqcup \dots \sqcup O_k, O_1 \sqcup \dots \sqcup O_k \cap V) \quad (\because \text{定理 2.5 (3)}) \\ &= \sum_i \text{ind}(O_i, O_i \cap V) \quad (\because \text{定理 2.5 (5)}). \end{aligned}$$

□

2.2. $\text{ind}(M, V)$ の構成のアイデア. 以下に、 $\text{ind}(M, V)$ の構成のアイデアを述べる。プロトタイプとなるのが次の Witten deformation である。

事実 2.8. (M, g) を完備 Riemann 多様体、 (W, c) を (M, g) 上の \mathbb{Z}_2 次数付き Clifford 加群束、 $h \in \text{End}(W)$ を次を満たす W の自己準同型とする。

- (1) h は Hermitian.
- (2) h は W の次数をずらす.
- (3) $\text{supp } h = \{x \in M \mid \ker(h_x: W_x \rightarrow W_x) \neq 0\}$ はコンパクト.
- (4) $h \circ c + c \circ h = 0$.

このとき、 $t \geq 0$ に対して、

$$D_t = D + th$$

とすると、十分大きな t に対して、 $\ker D_t \cap L^2(W)$ は有限次元である。さらにこのとき、 $\ker D_t^0 \cap L^2(W) - \ker D_t^1 \cap L^2(W)$ は t やデータの連続変形に依存しない。

我々の場合、事実 2.8 そのものを使うのではなく、 h の代わりに微分作用素 $\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} D_{\alpha} \rho_{\alpha}$ を使い、 t が十分大きいとき、 $D_t = D + t \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} D_{\alpha} \rho_{\alpha}$ の“指数”として $\text{ind}(M, V)$ を定める³。この摂動は、形式的には次のように事実 2.8 の無限次元類似とすることができる。各 $\alpha \in A$ に対して、 $W \rightarrow U_{\alpha}$ を $b \in U_{\alpha}$ のファイバーが $\Gamma(W|_{\pi_{\alpha}^{-1}(b)})$ である無限次元ベクトル束とする。すると定義 2.3 (2) より、 D_{α} は W の自己準同型と見なせる。さらに、定義 2.3 (3) は事実 2.8 (4) に対応する。実際の手順は次の通りである。

Step 1. M は閉かつ $V = M$ の場合に、十分大きな t に対して、 $\ker D_t = 0$ を示す。

Step 2. M がシリンダー状のエンド $V = N \times (0, \infty)$ を持ち、 V 上全てのデータは平行移動で不変である場合に、十分大きな t に対して、 $\ker D_t \cap L^2(W)$ は有限次元であり、 $\ker D_t^0 \cap L^2(W) - \ker D_t^1 \cap L^2(W)$ はデータの連続変形に依存しないことを示す。Step 1 はこれを示すのに用いられる。特に、 $\ker D_t^0 \cap L^2(W) - \ker D_t^1 \cap L^2(W)$ は十分大きな t にも依らないことが分かるので、これを $\text{ind}(M, V)$ と定義する。

Step 3. V が一般の形の場合、 V のある余次元 1 の閉部分多様体 N で M を切り、切り口をシリンダー状にのぼすことで Step 2 の場合に帰着させる。その際、 $\text{ind}(M, V)$ が切り口 N の取り方に依らないことをチェックする。

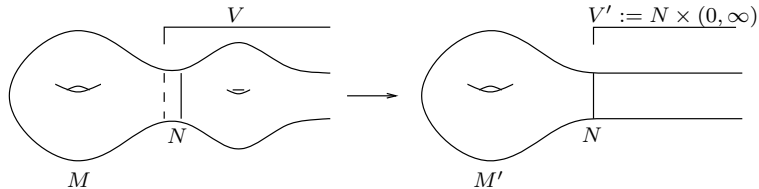


FIGURE 2. エンドの改変

³ $\{\rho_{\alpha}^2\}_{\alpha \in A}$ は $\{V_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ に従属する 1 の分割で、各 ρ_{α} は全ての π_{β} のファイバーにそって値が不変であるようなものである。このようなものは存在する。

2.3. 局所トーリック Lagrange ファイバー束への応用. \mathbb{C}^n 上のシンプレクティック形式 $\omega_{\mathbb{C}^n}$ を

$$\omega_{\mathbb{C}^n} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i,$$

とし, 写像 $\mu_{\mathbb{C}^n}: (\mathbb{C}^n, \omega) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ を

$$(2.3) \quad \mu_{\mathbb{C}^n}(z) = (|z_1|^2, \dots, |z_n|^2)$$

で定義する. ここで,

$$\mathbb{R}_{\geq 0}^n = \{p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mid p_i \geq 0 \ i = 1, \dots, n\}$$

とする. μ のファイバーはトーラスであり, $\omega_{\mathbb{C}^n}$ の各ファイバーへの制限は自明であることに注意しておく.

(M, ω) を $2n$ 次元シンプレクティック多様体, B を n 次元角付き多様体とする.

定義 2.9. $\mu: (M, \omega) \rightarrow B$ が局所トーリック Lagrange ファイバー束であるとは, B の (角付き多様体としての) 座標近傍系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ とシンプレクティック同相 $\psi_\alpha: (\mu^{-1}(U_\alpha), \omega|_{\mu^{-1}(U_\alpha)}) \rightarrow (\mu_{\mathbb{C}^n}^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha)), \omega_{\mathbb{C}^n}|_{\mu_{\mathbb{C}^n}^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha))})$ で $\mu_{\mathbb{C}^n} \circ \psi_\alpha = \varphi_\alpha \circ \mu$ となるものがあるときをいう.

例 2.10. 非特異射影的トーリック多様体の運動量写像は局所トーリック Lagrange ファイバー束である.

(M, ω) を閉シンプレクティック多様体, $\mu: (M, \omega) \rightarrow B$ を局所トーリック Lagrange ファイバー束, $(L, \nabla) \rightarrow (M, \omega)$ を Hermite 直線束とその接続で曲率が $2\pi\sqrt{-1}\omega$ であるものとする. ω と整合的な M の概複素構造を 1 つ固定すると L 係数 spin^c Dirac 作用素 $D: \Gamma(\wedge^{0,\bullet} T^*M \otimes_{\mathbb{C}} L) \rightarrow \Gamma(\wedge^{0,\bullet} T^*M \otimes_{\mathbb{C}} L)$ が得られる. このとき, 定理 2.5 の応用として, 次が得られた.

定理 2.11 ([5]). $\dim M = 4$ とする. このとき, $\text{ind } D$ は特異, 非特異両方の Bohr-Sommerfeld ファイバーの個数に等しい.

証明のポイントの一つは, 次のように, Bohr-Sommerfeld 条件を μ のファイバーに沿った de Rham 作用素の核が非自明であるという条件に読み替える点である. $(L, \nabla)|_{\mu^{-1}(b)}$ に非自明な大域的平行切断が存在するとき, $\mu^{-1}(b)$ は Bohr-Sommerfeld であるといった. この条件は, 局所系を係数とするコホモロジー $H^0(\mu^{-1}(b); (L, \nabla)|_{\mu^{-1}(b)}) \neq 0$ と言い換えることが出来る. さらに, μ のファイバーがトーラスであることを使うと, この条件は $H^\bullet(\mu^{-1}(b); (L, \nabla)|_{\mu^{-1}(b)}) \neq 0$ と同値である. Hodge 理論より, これは, $\mu^{-1}(b)$ の $(L, \nabla)|_{\mu^{-1}(b)}$ 係数 de Rham 作用素の核が非自明であることに他ならない. 証明では, ファイバーに沿った de Rham 作用素を用いて compatible system を構成する.

REFERENCES

1. J. E. Andersen, *Geometric quantization of symplectic manifolds with respect to reducible non-negative polarizations*, Comm. Math. Phys. **183** (1997), no. 2, 401–421.
2. V. Danilov, *The geometry of toric varieties (Russian)*, Uspekhi Mat. Nauk **33** (1978), no. 2, 85–134, English translation: Russian Math. Surveys **33** (1978), no. 2, 97–154.
3. H. Fujita, *Acyclic polarizations and localization of Riemann-Roch numbers*, 2008, 第 55 回幾何学シンポジウム.
4. H. Fujita, M. Furuta, and T. Yoshida, *Torus fibrations and localization of index I*, to appear in J. Math. Sci. Univ. Tokyo **17**, 2010. Also available at arXiv:0804.3258, .
5. ———, *Torus fibrations and localization of index II*, UTMS Preprint Series 2009-21, 64 pages. Also available at arXiv:0910.0358, 2009.
6. ———, *Torus fibrations and localization of index III*, in preparation, .
7. M. D. Grossberg and Y. Karshon, *Equivariant index and the moment map for completely integrable torus actions*, Adv. Math. **133** (1998), no. 2, 185–223.
8. V. Guillemin and S. Sternberg, *The Gelfand-Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds*, J. Funct. Anal. **52** (1983), no. 1, 106–128.
9. L. Jeffrey and J. Weitsman, *Bohr-Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula*, Comm. Math. Phys. **150** (1992), no. 3, 593–630.
10. Y. Karshon and S. Tolman, *The moment map and line bundles over presymplectic toric manifolds*, J. Differential Geom. **38** (1993), no. 3, 465–484.
11. M. Masuda, *Unitary toric manifolds, multi-fans, and equivariant index*, Tohoku Math. J. **51** (1999), no. 2, 237–265.
12. E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, J. Diff. Geom. **17** (1982), no. 4, 197–229.

偏極トーリック多様体のチャウ半安定性について

小野 肇 (東京理科大学理工学部)

概要

本講演では、偏極トーリック多様体のチャウ半安定性に関する組み合わせ論的な必要条件を紹介する。その応用として、トーリックファノ多様体の漸近的チャウ半安定性に関して知られている結果 [3] を再現するとともに、ファノではない場合にも拡張できることも見る。

1 概略

X をコンパクト複素多様体, L を X 上の豊富な正則直線束とする。(組 (X, L) のことを偏極多様体と呼ぶ。) 偏極多様体のモジュライを考える上で、幾何学的不変式論 (GIT) の意味での安定性が重要である事は良く知られている。また、ケーラー幾何 (特にスカラー曲率一定ケーラー計量の存在問題) においても、GIT 安定性は重要である：

予想 1.1 (Donaldson-Tian-Yau 予想). (X, L) を偏極多様体とする。このとき、ケーラー類 $c_1(L)$ にスカラー曲率一定ケーラー計量が存在するための必要十分条件は (X, L) がある種の GIT 安定性を持つ事である。

今現在、この予想における「GIT 安定性」の候補としては「 K -安定性」が最有力であり、活発な研究が進んでいる。一方、「漸近的チャウ安定性」については、障害が存在することが知られており [5, 2], トーリックファノ多様体についてはこれらの障害 (積分不変量) を [3] で得た方法 (ヒルベルト級数の微分) で実際計算出来る。その結果, [10] では、スカラー曲率一定ケーラー計量 (この場合にはケーラー・アインシュタイン計量) を許容するが漸近的チャウ半安定ではない 7 次元トーリックファノ多様体が存在することを示すことが出来た。つまり、「GIT 安定性」として漸近的チャウ安定性をとると、予想 1 は正しくないことがわかった¹。

今回は、より基本的な観点から、偏極トーリック多様体のチャウ半安定性の障害を与えることが出来ることについて発表する (用語の定義などは 2 章以降を参照のこと) : $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ を整 Delzant 多面体とし、対応する複素 n 次元偏極トーリック多様体を (X_Δ, L_Δ) と書くことにする。このとき、次が今回の話の主結果である：

定理 1.2. 自然数 i に対して、 (X_Δ, L_Δ^i) はチャウ半安定であるとする。このとき

$$\sum_{\mathbf{a} \in i\Delta \cap \mathbb{Z}^n} \mathbf{a} = \frac{i \{ \#(i\Delta \cap \mathbb{Z}^n) \}}{\text{Vol}(\Delta)} \int_{\Delta} \mathbf{x} dv \quad (\star)$$

が成り立つ。

¹この点については四ツ谷氏の講演で詳しく紹介されるはずである。

この定理と今まで漸近的チャウ半安定性に関して知られていた結果の間の関連を見てみよう. まず, [5, 2] において積分不変量の形で漸近的チャウ半安定性の障害が与えられた. これらはトーリックでなくても定義できるので, その点においては当然今回の結果よりも優れている. 一方, 定理 1.2 は各 (X_Δ, L_Δ^i) に関するチャウ半安定性の障害であるという点でより精密である. 実際, 定理 1.2 を用いて (X_Δ, L_Δ) の漸近的チャウ半安定性に関して次のことがわかる:

系 1.3. (X_Δ, L_Δ) が漸近的チャウ半安定とすると, 任意の自然数 i に対して (\star) が成り立つ. また, ある自然数 i_0 に対して (\star) が成り立たないとすると, 自然数 i_1 が存在して, i_1 以上の任意の自然数 i に対して (X_Δ, L_Δ^i) はチャウ不安定である.

さらに, Δ が reflexive な Delzant 多面体であるとき, つまり (X_Δ, L_Δ) が反標準偏極トーリックファノ多様体である場合には漸近的チャウ半安定であるための必要十分条件が得られる:

系 1.4. Δ を reflexive な Delzant 多面体とする. このとき (X_Δ, L_Δ) が漸近的チャウ半安定であることの必要十分条件は任意の自然数 i に対して

$$\sum_{\mathbf{a} \in i\Delta \cap \mathbb{Z}^n} \mathbf{a} = \frac{i \{ \#(i\Delta \cap \mathbb{Z}^n) \}}{\text{Vol}(\Delta)} \int_{\Delta} \mathbf{x} dv = \mathbf{0} \quad (\star)$$

が成り立つことである.

次に, [3] において, トーリックファノ多様体の積分不変量の情報はヒルベルト級数の微分を用いて得ることが出来ることが示されている. 定理 1.2 はその一部を再現し, さらに, ファノではない場合に一般化できる.

系 1.5. (X_Δ, L_Δ) が漸近的チャウ半安定であるとする

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial C_\Delta}{\partial x_1}(1, \dots, 1, t) \\ \vdots \\ \frac{\partial C_\Delta}{\partial x_n}(1, \dots, 1, t) \end{pmatrix} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} i \{ \#(i\Delta \cap \mathbb{Z}^n) \} t^i}{\text{Vol}(\Delta)} \int_{\Delta} \mathbf{x} dv$$

が成り立つ. 特に Δ が reflexive のとき

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial C_\Delta}{\partial x_1}(1, \dots, 1, t) \\ \vdots \\ \frac{\partial C_\Delta}{\partial x_n}(1, \dots, 1, t) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となる.

2 GIT 安定性

この章では, 幾何学的不変式論 (GIT) の初歩で今回の話と関係する部分について紹介する. 詳しくは [7] を参照.

G を簡約リー群とし, V を有限次元複素ベクトル空間で, G が線形に作用しているとする.

定義 2.1. $v \in V$ とする. v の G -軌道 $Gv \subset V$ の閉包が原点を含まないとき, v は (G -作用に関して) **半安定**であるという. また, $p \in \mathbb{P}(V)$ は, p の任意の代表元が半安定であるとき, 半安定であるという.

簡約リー群の線形作用については, 安定性に関する **Hilbert-Mumford の判定法**が非常に強力な道具となる. 一般には G の 1-パラメータ部分群を用いて述べられるが, ここではのちに使いやすい形で述べておく:

命題 2.2 (Hilbert-Mumford の判定法). $p \in \mathbb{P}(V)$ が G -作用に関して半安定であるための必要十分条件は, 任意の極大トーラス $H \subset G$ に対して p が H -作用に関して半安定であることである.

これにより, G が複素トーラス $(\mathbb{C}^\times)^n$ に同型の場合の半安定性について調べることが重要となるが, これは「ウェイト多面体」を通して判定することが出来ることが良く知られており, 実際, この視点が今回の結果を示す上でポイントとなる. G は $(\mathbb{C}^\times)^n$ に同型であるとする. このとき G -表現空間 V はウェイト分解する:

$$V = \sum_{\chi \in \chi(G)} V_\chi, \quad V_\chi = \{v \in V \mid \forall t \in G, t \cdot v = \chi(t)v\}$$

ここで, $\chi(G) \simeq \mathbb{Z}^n$ は G の指標群である.

定義 2.3. $0 \neq v = \sum_{\chi \in \chi(G)} v_\chi \in V$ に対して, $\{\chi \in \chi(G) \mid v_\chi \neq 0\} \subset \chi(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の凸包 $\text{Wt}_G(v) \subset \chi(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ を v の **ウェイト多面体**と呼ぶ.

このとき, 次が知られている:

命題 2.4. G, V は上述のとおりとする. このとき次は同値.

- $0 \neq v \in V$ は G -作用に関して半安定
- $0 \in \text{Wt}_G(v)$

したがって, まとめると,

$$[v] \in \mathbb{P}(V) \text{ が半安定} \iff \text{任意の極大トーラス } H \subset G \text{ に対して } 0 \in \text{Wt}_H(v)$$

ということになる.

3 チャウ半安定性

この章では, まず射影多様体のチャウ形式および (漸近的) チャウ半安定性を定義する. 2章で見たように, 半安定性を調べるには複素トーラスの作用に関するウェイト多面体が重要であった. そこで, チャウ形式のウェイト多面体であるチャウ多面体の簡単な性質について紹介する. この章の内容は [4] に詳しく述べられている.

定義 3.1. $X \subset \mathbb{C}P^N$ を次数 d の n 次元既約部分多様体とする. このとき,

$$Z_X := \{L \in \text{Gr}(N-n-1, \mathbb{C}P^N) \mid L \cap X \neq \emptyset\}$$

は $\text{Gr}(N-n-1, \mathbb{C}P^N)$ の次数 d の既約な超曲面であり, したがって, ある $R_X \in \mathbb{P}(\mathcal{B}_d(N-n-1, \mathbb{C}P^N))$ の零点として与えられる. ここで, $\mathcal{B}(N-n-1, \mathbb{C}P^N) = \bigoplus_d \mathcal{B}_d(N-n-1, \mathbb{C}P^N)$ はグラスマン多様体の斉次座標環である. R_X を X のチャウ形式と呼ぶ.

$SL(N+1, \mathbb{C})$ は $\mathcal{B}_d(N-n-1, \mathbb{C}P^N)$ に自然に作用するので, チャウ形式の $SL(N+1, \mathbb{C})$ -作用に関する安定性を考えることが出来る.

定義 3.2. $X \subset \mathbb{C}P^N$ を次数 d の n 次元既約部分多様体とする. X のチャウ形式 R_X が $SL(N+1, \mathbb{C})$ -作用に関して半安定であるとき, X はチャウ半安定であるという.

定義 3.3. E を X 上の非常に豊富な正則直線束とし, $\Psi: X \rightarrow \mathbb{P}(H^0(X; E)^*)$ を小平埋め込みとする. このとき, $\Psi(X) \subset \mathbb{P}(H^0(X; E)^*)$ がチャウ半安定であるとき, 偏極多様体 (X, E) はチャウ半安定であるという. また, 十分大きな任意の自然数 i に対して (X, L^i) がチャウ半安定であるとき, 偏極多様体 (X, L) は漸近的チャウ半安定であるという.

さて, 次の簡単な考察からわかるように, $X \subset \mathbb{C}P^N$ は対称性が高いほどチャウ半安定にはなりにくいという性質がある. (その意味では, 偏極トーリック多様体は「一番チャウ半安定になりにくい」対象である.)

まず, $G = (\mathbb{C}^\times)^{N+1}$ とし V を G の有限次元複素表現とする. H を N 次元部分トラス

$$H = \{(t_1, \dots, t_N, (t_1 \cdots t_N)^{-1} \mid (t_1, \dots, t_N)) \in (\mathbb{C}^\times)^N\} \simeq (\mathbb{C}^\times)^N$$

としたとき, $0 \neq v \in V$ に対して, $\text{Wt}_H(v) = \pi(\text{Wt}_G(v))$ である. ここで, $\pi: \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^N, (x_1, \dots, x_{N+1}) \mapsto (x_1 - x_{N+1}, \dots, x_N - x_{N+1})$ である. したがって, この場合には v が H -作用に関して半安定であれば, ある実数 t が存在して, $(t, \dots, t) \in \text{Wt}_G(v)$ となる. これをチャウ形式に適用すれば次が得られる.

命題 3.4. $X \subset \mathbb{C}P^N$ はチャウ半安定であるとする. このとき, ある実数 t が存在して $(t, \dots, t) \in \text{Wt}_{(\mathbb{C}^\times)^{N+1}}(R_X)$ となる. ただし, $(\mathbb{C}^\times)^{N+1} \subset GL(N+1; \mathbb{C})$ は正則な $(N+1)$ 次対角行列全体とみなす. チャウ形式 R_X のウエイト多面体 $\text{Wt}_{(\mathbb{C}^\times)^{N+1}}(R_X)$ を $X \subset \mathbb{C}P^N$ のチャウ多面体と呼ぶことにする.

また, 次のように, チャウ多面体 $\text{Wt}_{(\mathbb{C}^\times)^{N+1}}(R_X)$ のアフィン包 $\text{Aff}_{\mathbb{R}}(\text{Wt}_{(\mathbb{C}^\times)^{N+1}}(R_X))$ の余次元は $X \subset \mathbb{C}P^N$ の対称性が大きいほど高いことが知られている.

命題 3.5 ([4]). $X \subset \mathbb{C}P^N$ を n 次元既約多様体とし, X はいかなる超平面にも含まれないとする. このとき

$$\dim \text{Aff}_{\mathbb{R}}(\text{Wt}_{(\mathbb{C}^\times)^{N+1}}(R_X)) = N + 1 - \dim_{\mathbb{C}}\{t \in (\mathbb{C}^\times)^{N+1} \mid tX = X\}$$

が成り立つ.

したがって, $\dim_{\mathbb{C}}\{t \in (\mathbb{C}^\times)^{N+1} \mid tX = X\}$ が大きいほど, $X \subset \mathbb{C}P^N$ はチャウ半安定にはなりにくい.

4 偏極トーリック多様体のチャウ半安定性

この章ではまず、(整) Delzant 多面体, および reflexive 多面体を定義する. これらは Delzant 構成, およびモーメント像をとることにより, 滑らかな偏極トーリック多様体, および反標準偏極トーリックファノ多様体に対応していることは良く知られている². その後, より一般的なトーリック射影多様体に関して, チャウ多面体の性質について述べ, ([4] 参照) 定理 1.2 およびその系を示すことにする.

定義 4.1. $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元凸多面体とする. 次の条件が成り立つとき Δ を n 次元 **Delzant 多面体** と呼ぶ: $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d$ を Δ の頂点とする.

1. 各頂点 \mathbf{w}_i からはちょうど n 本の辺 $e_{i,1}, \dots, e_{i,n}$ が出ている.
2. 各辺 $e_{i,j}$ を生成する primitive ベクトル達 $\mathbf{e}_{i,1}, \dots, \mathbf{e}_{i,n} \in \mathbb{Z}^n$ は \mathbb{Z} 上 \mathbb{Z}^n を生成する.

さらに全ての頂点 \mathbf{w}_i が整数点であるとき, Δ を整 *Delzant* 多面体と呼ぶ.

n 次元整 Delzant 多面体 Δ に対応する n 次元偏極トーリック多様体を (X_Δ, L_Δ) と書くことにする. L_Δ は非常に豊富である. 例えば, 自然数 i に対して

$$i\Delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = i\mathbf{y}, \mathbf{y} \in \Delta\}$$

とおくと, $(X_{i\Delta}, L_{i\Delta}) = (X_\Delta, L_\Delta^i)$ となる.

定義 4.2. $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元整凸多面体とする. 次の条件が成り立つとき, Δ を **reflexive** であるという:

1. $F \subset \Delta$ を余次元 1 の面とすると, $\mathbf{n}_F \in \mathbb{Z}^n$ が存在して, $F = \{\mathbf{x} \in \Delta \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_F \rangle = 1\}$ と書ける.
2. $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ は Δ の内点である.

さて, 次に以下のような“トーリック射影多様体”を考える³. $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N+1}\} \subset \mathbb{Z}^n$ とし, A は affine に \mathbb{Z}^n を生成していると仮定する. このとき

$$X_A \mathbf{0} = \{[\mathbf{x}^{\mathbf{a}_1} : \dots : \mathbf{x}^{\mathbf{a}_{N+1}}] \mid \mathbf{x} \in (\mathbb{C}^\times)^n\} \subset \mathbb{C}P^N$$

の閉包 X_A は $\mathbb{C}P^N$ の n 次元 subvariety である. 例えば, $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元整 Delzant 多面体とし, $A = \Delta \cap \mathbb{Z}^n$ とすると, $X_A = X_\Delta$ であり, 埋め込み $X_A \subset \mathbb{C}P^N$ は非常に豊富な正則直線束 X_Δ に関する小平埋め込みに対応している.

命題 3.4 より, X_A がチャウ半安定性であるためには, チャウ多面体 $\text{Wt}_{(\mathbb{C}^\times)^{N+1}}(R_{X_A})$ と直線 $\mathbb{R} \cdot (1, \dots, 1)$ が交わる必要があった. したがって, 当然そのアフライン包 $\text{Aff}_{\mathbb{R}}(\text{Wt}_{(\mathbb{C}^\times)^{N+1}}(R_{X_A}))$ とも交わらなければならない. このようなトーリック射影多様体の場合, Gelfand-Kapranov-Zelevinsky [4] により, $\text{Aff}_{\mathbb{R}}(\text{Wt}_{(\mathbb{C}^\times)^{N+1}}(R_{X_A}))$ は次により与えられることが知られている⁴.

²具体的な構成はここでは必要ないので省略する.

³一般には正規多様体とは限らないので俗に言うトーリック多様体にはならない. しかし, チャウ点やチャウ安定性は同様に定義できる.

⁴より正確に言うと, この場合にはチャウ多面体は secondary 多面体と呼ばれるものと等しく, secondary 多面体のアフライン包が命題 4.3 で与えられる.

命題 4.3 ([4]). $Q \subset \mathbb{R}^n$ を A の凸包とする. このとき

$$\begin{aligned} & \text{Aff}_{\mathbb{R}}(\text{Wt}_{(\mathbb{C}^\times)^{N+1}}(R_{X_A})) \\ &= \left\{ (\varphi_1, \dots, \varphi_{N+1}); \sum_{j=1}^{N+1} \varphi_j = (n+1)! \text{Vol}(Q), \sum_{j=1}^{N+1} \varphi_j \mathbf{a}_j = (n+1)! \int_Q \mathbf{x} dv \right\} \end{aligned}$$

が成り立つ.

したがって, 命題 3.4, 4.3 より, 次が成り立ち, したがって定理 1.2 が成り立つ.

定理 4.4. $X_A \subset \mathbb{C}P^N$ がチャウ半安定であるとすると,

$$\sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{a}_j = \frac{N+1}{\text{Vol}(Q)} \int_Q \mathbf{x} dv$$

が成り立つ.

最後に, 系 1.3, 1.4 について見てみよう. 一般に, $P \subset \mathbb{R}^n$ を凸整多面体とする. このとき, 次のような n 次多項式 $E_P(t)$ (P の **Ehrhart 多項式**) の存在がよく知られている:

$$E_P(t) = \text{Vol}(P)t^n + \sum_{j=0}^{n-1} E_{P,j}t^j, \quad i \in \mathbb{N} \text{ に対して } E_P(i) = \#(iP \cap \mathbb{Z}^n)$$

同様に, 次のような \mathbb{R}^n -値多項式 $\mathbf{s}_P(t)$ も存在する:

$$\mathbf{s}_P(t) = t^{n+1} \int_P \mathbf{x} dv + \sum_{j=1}^n t^j \mathbf{s}_{P,j}, \quad i \in \mathbb{N} \text{ に対して } \mathbf{s}_P(i) = \sum_{\mathbf{a} \in iP \cap \mathbb{Z}^n} \mathbf{a}$$

したがって, (☆) の両辺は i に関して \mathbb{R}^n -値 $(n+1)$ 次多項式であるから, (X, L) が漸近的チャウ半安定であれば, 全ての i で (☆) が成り立たなければならない. また, 自然数 i_0 について (☆) が成り立たないとすると, 自然数 i_1 が存在して, i_1 以上の任意の自然数 i に対して (☆) は成り立たない, つまり, (X_Δ, L_Δ^i) はチャウ半安定ではない. これで系 1.3 が示せた.

(☆) は

$$\sum_{j=1}^n i^j \left\{ \text{Vol}(\Delta) \mathbf{s}_{\Delta,j} - E_{\Delta,j-1} \int_{\Delta} \mathbf{x} dv \right\} = \mathbf{0} \quad (\ast)$$

と書き換えることが出来るので次がわかる.

系 4.5. $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元整 *Delzant* 多面体とする. (X_Δ, L_Δ) が漸近的チャウ半安定とすると, 各 $j = 1, \dots, n$ に対して

$$\mathcal{F}_{\Delta,j} := \text{Vol}(\Delta) \mathbf{s}_{\Delta,j} - E_{\Delta,j-1} \int_{\Delta} \mathbf{x} dv = \mathbf{0}$$

となる.

これらのベクトルは n 次元トーラスのリー環の character と思える. 一方, [2] による積分不変量 $\mathcal{F}_{Td^p}, p = 1, \dots, n$ を n 次元トーラスのリー環に制限することでも n 個の character が得られる. この2つは漸近的チャウ半安定性の障害としてはほぼ同等の情報を持つと予想できる. 実際, Δ が reflexive の場合には

$$\forall p, \mathcal{F}_{Td^p} \equiv 0 \Rightarrow \forall j, \mathcal{F}_{\Delta, j} = \mathbf{0}$$

であることがわかる.

次に, 系 1.4 を示す. まず, $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ を reflexive 多面体とし, (X_Δ, L_Δ) は漸近的チャウ半安定であるとする. このとき, [2] により, 二木不変量は消えるので $\int_\Delta \mathbf{x} dv = \mathbf{0}$ である. したがって, 系 1.3 より任意の自然数 i に対して (★) が成り立つ. 逆に, 任意の自然数 i に対して (★) が成り立つとする. このとき, [11] の結果より, X_Δ にはケーラー・アインシュタイン計量が存在する. また, この場合ヒルベルト級数の微分が消えるので, [3] の結果を用いると, 積分不変量 $\mathcal{F}_{Td^p}, p = 1, \dots, n$ は消える. したがって, [6] の結果より, (X_Δ, L_Δ) は漸近的チャウ半安定となる.

5 ヒルベルト級数

この章では, なぜヒルベルト級数の微分が漸近的チャウ半安定性と関係するのかを考えることにする. 一言で言うと, ヒルベルト級数の微分が $\mathbf{s}_\Delta(i)$ の母関数であるからである.

$\Delta \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元整 Delzant 多面体とし, $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d \in \mathbb{Z}^n$ をその頂点とする. このとき, Δ の錐 $\mathcal{C}(\Delta) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を

$$\mathcal{C}(\Delta) := \{r_1(\mathbf{w}_1, 1) + \dots + r_d(\mathbf{w}_d, 1) \mid r_1, \dots, r_d \geq 0\}$$

により定義し, Δ に関するヒルベルト級数 C_Δ を

$$C_\Delta(x_1, \dots, x_{n+1}) := \sum_{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathcal{C}(\Delta) \cap \mathbb{Z}^{n+1}} x_1^{a_1} \cdots x_{n+1}^{a_{n+1}} =: \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{C}(\Delta) \cap \mathbb{Z}^{n+1}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}}$$

により定義する. すると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial C_\Delta}{\partial x_1}(1, \dots, 1, t) \\ \vdots \\ \frac{\partial C_\Delta}{\partial x_n}(1, \dots, 1, t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{s}_\Delta(i) t^i$$

となる. これと定理 1.2, 系 1.4 を合わせれば系 1.5 が得られる.

参考文献

- [1] S. K. Donaldson, Scalar curvature and projective embeddings. I, J. Differential Geom. 59 (2001), 479–522.

- [2] A. Futaki, Asymptotic Chow semi-stability and integral invariants, *Internat. J. Math.* 15 (2004), 967–979.
- [3] A. Futaki, H. Ono and Y. Sano, Hilbert series and obstructions to asymptotic semistability, arXiv:0811.1315.
- [4] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.
- [5] T. Mabuchi, An obstruction to asymptotic semistability and approximate critical metrics, *Osaka J. Math.*, 41 (2004), no. 2, 463–472.
- [6] T. Mabuchi, An energy-theoretic approach to the Hitchin-Kobayashi correspondence for manifolds. I, *Invent. Math.* 159 (2005), no. 2, 225–243.
- [7] D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, *Geometric Invariant Theory*, Third edition, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2)*, 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [8] B. Nill and A. Paffenholz, Examples of non-symmetric Kähler-Einstein toric Fano manifolds, arXiv:0905.2054.
- [9] H. Ono, A necessary condition for Chow semistability of polarized toric manifolds, arXiv:1003.1553.
- [10] H. Ono, Y. Sano and N. Yotsutani, An example of asymptotically Chow unstable manifolds with constant scalar curvature, arXiv:0906.3836.
- [11] X.-J. Wang and X. Zhu, Kähler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class, *Adv. Math.* 188 (2004), no. 1, 87–103.

COMPACT TORIC 多様体上の LAGRANGIAN FLOER THEORY について

北大・理 小野 薫

複素射影空間の Clifford torus の Floer cohomology は Cheol-Hyun Cho 氏 [Cho1] の研究があり、それに続いて toric Fano 多様体の Lagrangian torus fiber の場合には Cho [Cho2], Cho-Oh [CO] の研究がある。この講演では、深谷賢治氏 (京大・理)、Yong-Geun Oh 氏 (U. Wisconsin, Madison)、太田啓史氏 (名大・多元数理) との共同研究 [FOOO2], [FOOO3], [FOOO5] に基づき、compact toric 多様体の Lagrangian torus fiber の Floer 理論について得られたことをいくつか紹介したい。

1. 言葉の準備を少々

(X, ω) を $2n$ 次元 compact symplectic 多様体とする。即ち、 ω は非退化な閉 2 次微分形式である。すぐに分かる symplectic 多様体の例としては、滑らかな多様体の余接ベクトル束の全空間、Kähler 多様体などがある。 ω は非退化なので、 $v \in TX \mapsto i(v)\omega \in T^*X$ は接ベクトル束と余接ベクトル束の同型を与え、これによって、ベクトル場と 1 次微分形式とは 1 対 1 に対応する。外微分の Cartan の公式から、 $\mathcal{L}_v\omega = 0$ を満たすベクトル場 v と閉 1 次微分形式 η が対応することが分かる。特に X 上の滑らかな関数 h に対して $i(X_h)\omega = dh$ を満たすベクトル場 X_h が定まり、これを h から決まる Hamilton ベクトル場という。

$H : [0, 1] \times X \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、 $h_t(x) = H(t, x)$ とおくと、Hamilton ベクトル場の 1-parameter 族 $\{X_{h_t}\}$ が定まる。これを積分して、isotopy $\{\phi_t^H\}$, $\phi_0^H = id$, を得る。 (X, ω) の微分同相写像 ϕ がある H を用いて $\phi = \phi_1^H$ と書けるとき、 ϕ は Hamilton 微分同相写像であるという。Hamilton 微分同相写像は symplectic 形式 ω を保つ (symplectic 微分同相写像)。

X の部分多様体 L が (1) ω の L への制限は 0, (2) $\dim L = \frac{1}{2} \dim X$ の 2 条件を満たすとき、Lagrange 部分多様体という。以下では埋め込まれた Lagrange 部分多様体のみを考える。例をいくつか挙げる。

- 曲面上の曲線
- symplectic 微分同相写像 $\phi : X \rightarrow X$ のグラフ $\Gamma_\phi \subset (X, \omega) \times (X, \omega)$ は Lagrange 部分多様体となり、 ϕ の不動点集合は Lagrange 部分多様体の交叉 $\Gamma_\phi \cap \Gamma_{id}$ と同一視される。
- 滑らかな多様体 M 上の閉 1 次微分形式 η を余接ベクトル束 T^*M の切断とみるとその像は Lagrange 部分多様体である。
- 複素射影空間の中で、実数係数の多項式で定義された複素代数部分多様体の中で実形は Fubini-Study 形式 (の制限) に関して Lagrange 部分多様体となる。

L_0, L_1 を (X, ω) の埋め込まれた横断的に交わる Lagrange 部分多様体の対とする。然るべき状況では (L_0, L_1) の Floer 複体 $(CF^\bullet(L_1, L_0), \delta)$ が以下の性質を持つように構成できる。

- (1) $CF^\bullet(L_1, L_0)$ は $L_0 \cap L_1$ で生成される自由加群。

(2) cohomology $HF^\bullet(L_1, L_0)$ は L_0, L_1 の Hamilton 変形で不変。

ここで、Lagrange 部分多様体 L の Hamilton 変形とは、 L の Hamilton 微分同相写像による像のことをいう。

更に状況によっては

(3) L_1 が L_0 の Hamilton 変形とすると、 $HF^\bullet(L_1, L_0)$ は $H^\bullet(L_0)$ と同型。

が成立する。

これらが全て成り立つときには、任意の Hamilton 微分同相写像 ϕ に対して、 L と $\phi(L)$ は必ず交わり、交叉が横断的であれば、その交点の数が L の Betti 数の和以上であることが分かる。Floer [Fl] は、 $\pi_2(X, L_0) = 0$ であり、 L_1 は L_0 の Hamilton 変形であるときに上記の (1),(2),(3) を満たす複体 $(CF^\bullet(L_1, L_0), \delta)$ を構成してみた。一般には cochain 複体 $CF^\bullet(L_1, L_0)$ を定義するには障害があり¹、それを扱うための一般論は、[FOOO1] にある。

2. COMPACT TORIC 多様体と LAGRANGIAN TORUS FIBER

複素 n 次元多様体 X が toric 多様体であるとは、 n 次元複素 torus $(\mathbf{C}^*)^n$ が X に効果的に作用し、その上で作用が自由になっている軌道が X に dense に含まれていることをいう。一般には compact toric 多様体は Kähler 多様体になるとは限らないが、以下では Kähler 構造を持つ compact toric 多様体のみを考える。必要であれば極大 compact 群 $T^n \subset (\mathbf{C}^*)^n$ の作用で平均することで、Kähler 形式 ω を T^n -不変にできる。

T^n の (X, ω) への作用は Hamilton 的で、運動量写像 $\mu: X \rightarrow \text{Lie}(T^n)^*$ を持つ。 X の μ による像 $P = \mu(X)$ は $\text{Lie}(T^n)^*$ の中で、 $\mu(X^T)$ の凸包となる。ここで X^T は X への T^n -作用の不動点集合を表す。 $u \in \text{Int}(P)$ に対し、 $L(u) = \mu^{-1}(u)$ と置くと、 $L(u)$ は T^n -作用の自由軌道で Lagrange 部分多様体となることが分かる。 $L(u)$ を u 上の Lagrangian torus fiber と呼ぶ。

ここで toric 多様体に関わるいくつかの記号を準備する。

$N = \text{Hom}(S^1, T^n)$, $M = \text{Hom}(T^n, S^1)$ とする。どちらも階数 n の \mathbf{Z} 上の自由加群で、自然な pairing $N \times M \rightarrow \mathbf{Z}$ があり、互いに双対な格子となる。これらを \mathbf{R} に係数拡大したものをそれぞれ $N_{\mathbf{R}}, M_{\mathbf{R}}$ と書く。 $N_{\mathbf{R}}$ は自然に $\text{Lie}(T^n)$ と同型になり、それは $M_{\mathbf{R}}$ と $\text{Lie}(T^n)^*$ の同型を導く。

P は $M_{\mathbf{R}}$ の中の有限個の頂点を持つ凸多面体なので、有限個の affine 関数 $\ell_i, i = 1, \dots, d$ を用いて

$$P = \{u \in M_{\mathbf{R}} \mid \ell_i(u) \geq 0, i = 1, \dots, d\}$$

と書ける。更に、 ℓ_i は、 $v_i \in N, \lambda_i \in \mathbf{R}$ を用いて、

$$\ell_i(u) = \langle u, v_i \rangle - \lambda_i$$

と表されることが分かる。(toric 多様体の N の扇を用いた記述を使うと、 v_i は扇の 1 次元錐の素な生成元である)

$\partial_i P = \{u \in P \mid \ell_i(u) = 0\}$ とすると、 $\partial P = \cup_{i=1}^d \partial_i P$ である。 $D_i = \mu^{-1}(\partial_i P)$ は $v_i \in N \subset \text{Lie}(T^n)$ の生成する部分群 $S_{v_i}^1$ の不動点集合で、既約な toric 因子である。

¹一般には Floer 複体が構成できないことは勿論 Floer 自身分かっていたようである。

包含写像 $L(u) \rightarrow X$ は null-homotopic なので、 $(X, L(u))$ の homology 完全系列から次の完全系列を得る。

$$0 \rightarrow H_2(X; \mathbf{Z}) \rightarrow H_2(X, L(u); \mathbf{Z}) \rightarrow H_1(L(u); \mathbf{Z}) \rightarrow 0$$

ここで、 $\beta_i, i = 1, \dots, d$ を連続写像 $v : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (X, L(u))$ で v と D_j の代数的交点数が $v \cdot D_j = \delta_{ij}$ を満たすものとする。 $\beta_i \in H_2(X, L(u); \mathbf{Z})$ の $H_2(L(u); \mathbf{Z})$ での像は v_i になる。

格子 M の基底を $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ とし、その双対基底を $\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$ とする。

Lagrangian torus fiber $L(u)$ と T^n の T^n -同変微分同相写像を用いて同一視することで、自然な同型 $N \cong H_1(L(u); \mathbf{Z})$, $M \cong H^1(L(u); \mathbf{Z})$ を得る。以下、 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ を $H^1(L(u); \mathbf{Z})$ の基底とも見る。

3. $L(u)$ に付随したフィルター付 A_∞ -代数

先ず、普遍 Novikov 環を定義する²。 T を形式的変数とする。

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left\{ \sum a_i T^{\lambda_i} \mid a_i \in \mathbf{C}, \lambda_i \in \mathbf{R}, \lambda_i \rightarrow +\infty \right\} \\ \Lambda_0 &= \left\{ \sum a_i T^{\lambda_i} \in \Lambda \mid \lambda_i \geq 0 \right\} \\ \Lambda_+ &= \left\{ \sum a_i T^{\lambda_i} \in \Lambda \mid \lambda_i > 0 \right\} \end{aligned}$$

$v_T : \Lambda \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$v_T\left(\sum a_i T^{\lambda_i}\right) = \min\{\lambda_i \mid a_i \neq 0\}, \quad v_T(0) = +\infty$$

と定めると、 v_T は非アルキメデスの付値を定め、 $\Lambda_0 = \{v_T \geq 0\}$, $\Lambda_+ = \{v_T > 0\}$ となる。特に、 Λ_0 の可逆元全体 $(\Lambda_0)^\times$ は $\Lambda_0 \setminus \Lambda_+$ であり、 Λ_+ は Λ_0 の唯一の極大イデアルである。また、 Λ は Λ_0 の商体である。

$L(u)$ 上には T^n が自由かつ推移的に作用していた。この作用に関する $L(u)$ 上の不変微分形式の空間を $\mathcal{H}(L(u))$ と書く。 $\mathcal{H}(L(u))$ は wedge 積に関して代数をなす。また、 $\mathcal{H}(L(u))$ は $L(u)$ 上の T^n -不変計量に関する調和形式の空間とも一致するので、 $L(u)$ の cohomology $H^*(L(u))$ と同型である。次数を1ずらして $(\mathcal{H}(L(u))[1])^p = \mathcal{H}(L(u))^{p+1}$ とおく。 $(X, L(u))$ への境界付き安定写像の空間を用いて $\mathcal{H}(L(u))$ 上にフィルター付 A_∞ -代数の構造を入れる。

Σ を高々 node, 境界上の node を持つ境界 $\partial\Sigma$ が連結な種数 0 の Riemann 面とし、 $\partial\Sigma$ 上に境界 node ではない相異なる点 z_0, \dots, z_k が $\partial\Sigma$ の向きに合うように付けられているとする。境界上に $(k+1)$ 個の点のついた $(\Sigma, \partial\Sigma)$ から $(X, L(u))$ への写像 w が境界付き安定写像であるとは、 w の Σ の各既約成分への制限が正則写像で、 $(\Sigma, \partial\Sigma, z_0, \dots, z_k)$ の正則自己同型 f で $w \circ f = w$ を満たすものが有限群をなすことをいう。 $\beta \in H_2(X, L(u); \mathbf{Z})$ を表す $(k+1)$ 点付き境界付き安定写像の moduli 空間を $\mathcal{M}_{k+1}(\beta)$ とする。 $z_j, j = 0, \dots, k$

²[FOOO1] では次数 2 の生成元 e も加えて普遍 Novikov 環の定義しているが、ここでは e は加えないで考える。

での値を取ることで、 T^n -同変な写像 $ev_j : \mathcal{M}_{k+1}(\beta) \rightarrow L(u)$ が定まる。これを用いて、 $k \geq 0, (k, \beta) \neq (0, 0), (1, 0)$ に対して多重線形写像

$$\mathbf{m}_{k,\beta} : (\mathcal{H}(L(u))[1])^{\otimes k} \rightarrow \mathcal{H}(L(u))[1], \quad \mathbf{m}_{k,\beta}(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k) = (ev_0)_! \prod_{j=1}^k ev_j^* \xi_j$$

を定義する。ここで $(ev_0)_!$ は ev_0 のファイバーに沿った積分である。外微分 d は $\mathcal{H}(L(u))$ 上では 0 であることから $\mathbf{m}_{1,0} = 0$ とする。 $\mathbf{m}_{2,0}$ に対しては、 $\mathbf{m}_{2,0}(\xi_1 \otimes \xi_2) = (-1)^{\epsilon} \xi_1 \wedge \xi_2$, $\epsilon = \deg \xi_1 (\deg \xi_2 + 1)$ となることも分かる。更に次の関係式が成り立つ。

$$\sum_{\beta' + \beta'' = \beta} \sum_{k_1 + k_2 = k+1} (-1)^{\epsilon_i} \mathbf{m}_{k_1, \beta'}(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_{i-1} \otimes \mathbf{m}_{k_2, \beta''}(\xi_i \otimes \cdots \otimes \xi_{i+k_2-1})) \otimes \xi_{i+k_2} \otimes \cdots \otimes \xi_k = 0$$

ここで $\epsilon_i = \sum_{j=1}^{i-1} (\deg \xi_j + 1)$ である。この式は大雑把には次の 2 つのことから従う。

- $\mathcal{M}_{k+1}(\beta) = \bigcup_{\beta' + \beta'' = \beta} \bigcup_{k_1 + k_2 = k+1} \mathcal{M}_{k_1+1}(\beta')_{ev_j} \times_{ev_0} \mathcal{M}_{k_2+1}(\beta'')$
- Z, B を compact 有向多様体、 $p : Z \rightarrow B$ を沈め込みとすると、 Z 上の微分形式 η に対して $dp_!(\eta) = p_!(d\eta) \pm (p|_{\partial Z})_!(\eta|_{\partial Z})$ が成り立つ。

ここで、 $\mathcal{H}(L(u); \Lambda_0)$ 上の Λ_0 -多重線形写像

$$\mathbf{m}_k : \mathcal{H}(L(u); \Lambda_0)[1]^{\otimes k} \rightarrow \mathcal{H}(L(u); \Lambda_0)[1]$$

を $\mathbf{m}_k = \sum_{\beta} \mathbf{m}_{k,\beta} \otimes T^{\int_{\beta} \omega}$ と定める。上記の関係式から $\{\mathbf{m}_k\}_{k \geq 0}$ はフィルター付 A_{∞} -代数の関係式

$$\sum_{k_1 + k_2 = k+1} (-1)^{\epsilon_i} \mathbf{m}_{k_1}(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_{i-1} \otimes \mathbf{m}_{k_2}(\xi_i \otimes \cdots \otimes \xi_{i+k_2-1})) \otimes \xi_{i+k_2} \otimes \cdots \otimes \xi_k = 0$$

を満たす。

定理 3.1. $(\mathcal{H}(L(u); \Lambda_0), \{\mathbf{m}_k\}_{k \geq 0})$ はフィルター付 A_{∞} -代数である。

$b \in \mathcal{H}^1(L(u); \Lambda_0) = \mathcal{H}(L(u); \Lambda_0)[1]^0$ を用いて $\{\mathbf{m}_k\}$ の“変形”できる。 $B(\mathcal{H}(L(u); \Lambda_0)[1]) = (\bigoplus_k \mathcal{H}(L(u); \Lambda_0)[1]^{\otimes k})^{\wedge}$ とおく。ここで \wedge は v_T -完備化を表す。余積 Δ を

$$\Delta(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k) = \sum_{i=0}^k (\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_i) \otimes (\xi_{i+1} \otimes \cdots \otimes \xi_k)$$

を定め、 \mathbf{m}_k を coderivation として $\widehat{\mathbf{m}}_k$ に拡張し、 $\widehat{d} = \sum_k \widehat{\mathbf{m}}_k$ とおく。フィルター付 A_{∞} -関係式は $\widehat{d} \circ \widehat{d} = 0$ と同値である。 $e^b = 1 + b + b \otimes b + b \otimes b \otimes b + \cdots$ とし、 $B(\mathcal{H}(L(u); \Lambda_0)[1])$ の自己同型 Φ^b を

$$\Phi^b(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_N) = e^b \otimes \xi_1 \otimes e^b \cdots e^b \otimes \xi_N \otimes e^b$$

と定め、 $\widehat{d}^b = (\Phi^b)^{-1} \circ \widehat{d} \circ \Phi^b$ と定義する。多重線形写像 \mathbf{m}_k^b を次で定める。

$$\mathbf{m}_k^b : \mathcal{H}(L(u); \Lambda_0)[1]^{\otimes k} \subset B(\mathcal{H}(L(u); \Lambda_0)[1]) \xrightarrow{\widehat{d}^b} B(\mathcal{H}(L(u); \Lambda_0)[1]) \rightarrow \mathcal{H}(L(u); \Lambda_0)$$

ここで3つ目の写像は $\mathcal{H}(L(u); \Lambda_0)[1]$ への射影である。 \hat{d}^b は $\{\mathfrak{m}_k^b\}$ の coderivation としての拡張の和 $\hat{d}^b = \sum \hat{\mathfrak{m}}_k^b$ と書くことができ、 $\hat{d}^b \circ \hat{d}^b = 0$ となることから、 $\{\mathfrak{m}_k^b\}_{k \geq 0}$ もフィルター付 A_∞ -代数の構造を定める。

一般には symplectic 多様体の Lagrange 部分多様体に対しては $\mathfrak{m}_1^b \circ \mathfrak{m}_1^b = 0$ となる b が存在する保証はないが、compact toric 多様体 X の Lagrangian torus fiber $L(u)$ の場合は全ての $b \in \mathcal{H}^1(L(u); \Lambda_0)$ に対して

$$\mathfrak{m}_0^b(1) = \mathfrak{m}_0(1) + \mathfrak{m}_1(b) + \mathfrak{m}_2(b \otimes b) + \dots$$

はフィルター付 A_∞ -代数の $\text{unit}^3 \mathbf{e} = PD[L(u)]$ に Λ_0 のある元を掛けたものになるので、フィルター付 A_∞ -代数の関係式を用いると $\mathfrak{m}_1^b \circ \mathfrak{m}_1^b = 0$ が成り立つことが分かる。 $\mathfrak{m}_0^b(1) = \mathfrak{P}\mathfrak{D}^{L(u)}(b)\mathbf{e}$ で定まる $\mathfrak{P}\mathfrak{D}^u = \mathfrak{P}\mathfrak{D}^{L(u)}$ を $L(u)$ の potential 関数と呼ぶ⁴。

$(X, L(u))$ の potential 関数は、 $\mathcal{M}_{k+1}(\beta) \neq \emptyset$ である β からの寄与の和で表される。toric 因子 D_i の meridian β_i に対しては、 $ev_0 : \mathcal{M}_1(\beta_i) \rightarrow L(u)$ は向きを保つ微分同相写像であることなどから、その寄与は $e^{(b, v_i)} T^{\ell_i(u)}$ であることが分かる。それらの和を取った

$$\mathfrak{P}\mathfrak{D}_0^u(b) = \sum_{i=1}^d e^{(b, v_i)} T^{\ell_i(u)}$$

を leading order potential 関数と呼ぶ。 $(X, L(u))$ の全ての正則円板は [CO] で記述が与えられ、Fredholm 正則性も示されている。しかし、既約成分が一つでない境界付安定写像からの記述は容易ではない⁵。

toric Fano 多様体の場合には次が成り立つ。

命題 3.2. 命題 X を toric Fano 多様体、 $L(u)$ をその Lagrangian torus fiber とすると、 $(X, L(u))$ の potential 関数 $\mathfrak{P}\mathfrak{D}^u$ は $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_0^u$ と一致する。

$b = \sum x_i \mathbf{e}_i$ と前出の M の基底 \mathbf{e}_i を用いて表し、 $y_i = e^{x_i} = \sum x_i^n / n!$ とおく。 $v_i = \sum v_{i,j} \mathbf{e}_j^* \in N$ と $v_{i,j}$ を定めると、

$$\mathfrak{P}\mathfrak{D}_0^u(b) = \sum y_1^{v_{i,1}} \dots y_n^{v_{i,n}} T^{\ell_i(u)}$$

と書ける。右辺は y_1, \dots, y_n に関する Laurent 多項式である。potential 関数も y_1, \dots, y_n を用いた表記ができるが、一般には無限個の項が現れる。

前述のように $\mathfrak{m}_0^b(1)$ が unit の定数倍であったことから、 $\mathfrak{m}_1^b \circ \mathfrak{m}_1^b = 0$ なので、 \mathfrak{m}_1^b に関する cohomology を取ることができる。これを $(L(u), b)$ の (Bott-Morse 型) Floer cohomology と呼び、 $HF((L(u), b); \Lambda_0)$ と書く。さらに、Leibniz 型公式

$$\mathfrak{m}_1^b(\mathfrak{m}_2^b(\xi_1 \otimes \xi_2)) + \mathfrak{m}_2^b(\mathfrak{m}_1^b(\xi_1) \otimes \xi_2) + (-1)^{\deg \xi_1 - 1} \mathfrak{m}_2^b(\xi_1 \otimes \mathfrak{m}_1^b(\xi_2)) = 0$$

も成り立つことが分かる。

³ \mathbf{e} が unit とは、 $\mathfrak{m}_2(\mathbf{e} \otimes \xi) = (-1)^{\deg \xi} \mathfrak{m}_2(\xi \otimes \mathbf{e}) = \xi$, $\mathfrak{m}_k(\dots \otimes \mathbf{e} \otimes \dots) = 0, k \neq 2$ が成り立つこと。

⁴[FOOO1] で定義された potential 関数を $\mathcal{H}^1(L(u); \Lambda_0)$ に制限したものをここでは $L(u)$ の potential 関数と呼ぶ。

⁵[FOOO4] に次数2の Hirzebruch 曲面の Lagrangian torus fiber についての計算がある。

$b = \sum x_i \mathbf{e}_i$ が potential 関数 $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ の臨界点である、即ち

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathfrak{P}\mathfrak{D}(\sum x_i \mathbf{e}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

を満たすことは、

$$\mathfrak{m}_1^b(\mathbf{e}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

と同値になる。前出の $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ に対する Leibniz 型公式と、 $L(u)$ の常 cohomology $H^*(L(u))$ が $H^1(L(u))$ で生成され、 $\mathfrak{m}_2 \bmod \Lambda_+$ が本質的に cup 積であることを合わせると、次が分かる。

定理 3.3. b が $\mathfrak{P}\mathfrak{D}^u$ の臨界点であること、 $HF(L(u); \Lambda_0)$ が Λ_0 -加群として $H^*(L(u); \Lambda_0)$ と同型になること、 $HF(L(u); \Lambda_0) \neq 0$ であることは同値である。

toric Fano 多様体の時は $\mathfrak{P}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\mathfrak{D}_0$ であった。 $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_0$ は y_1, \dots, y_n の Laurent 多項式であったので、 $H^1(L(u); (\Lambda_0)^\times) \cong H^1(L(u); \Lambda_0)/2\pi\sqrt{-1}H^1(L(u); \mathbf{Z})$ 上の Λ_0 -値関数を定める。

$$W_0^u(y_1, \dots, y_n) = \mathfrak{P}\mathfrak{D}_0^u(x_1, \dots, x_n), \quad y_i = e^{x_i}$$

とおく。すると、前出の表示からこれらは、 $u \in \text{Int}P$ に限らず $u \in M_{\mathbf{R}}$ について定まることが分かる。また、 $x_i \in \Lambda_0$ と $y_i \in (\Lambda_0)^\times = \Lambda_0 \setminus \Lambda_+$ とは同値であることであることにも注意する。potential 関数についても、 $\mathfrak{P}\mathfrak{D}^u(x_1, \dots, x_n) = W^u(y_1, \dots, y_n)$ と書けることも分かるが、Fano 性を仮定しないとこれらは一般に有限和ではなく、 $u \in \text{Int}P$ でないときには Λ_0 に値を取る関数として定まらない。

定理 3.4. ⁶ (Theorem 7.8 [FOOO2]) X を compact toric Fano 多様体とする。potential 関数 $W_0^u : H^1(L(u); (\Lambda_0)^\times) \rightarrow \Lambda_0$ が臨界点を持つならば、 $u \in \text{Int}P$ である。

toric Fano 多様体の中でも特別な単調な (monotone) 場合を考える。ここで symplectic 多様体 (X, ω) が単調 (monotone) であるとは、 $c_1(X) = a[\omega]$ ⁷ を満たす正数 a が存在することをいう。そのとき、Lagrange 部分多様体 $L \subset (X, \omega)$ が単調であるとは、 $L \subset X$ の Maslov 類 $\mu_L \in H^2(X, L; \mathbf{Z})$ と ω の定める $[\omega] \in H^2(X, L; \mathbf{R})$ が $\mu_L = 2a[\omega]$ ⁸ を満たすことをいう。

定理 3.5. (Theorem 7.11 [FOOO2]) (X, ω) を単調な compact toric 多様体とする。Lagrangian torus fiber で単調なもの $L(u_0)$ がただ一つ存在し、 $L(u_0)$ は potential 関数が臨界点を持つただ一つの Lagrangian torus fiber である。

この定理が主張するのは、Lagrange torus fiber の中で potential function が臨界点 b をもつものは $L(u_0)$ が唯一のものであることで、臨界点 b の個数については後述の定理 3.6 がある。Fano とは限らない toric 多様体 (X, ω) の Lagrangian torus fiber $L(u)$ に対しては、一般に $\mathfrak{P}\mathfrak{D}^u \neq \mathfrak{P}\mathfrak{D}_0^u$ であるが、leading order potential 関数 $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_0^u$, $u \in \text{Int}P$, の臨界点がある非退化性を満たすならば、potential $\mathfrak{P}\mathfrak{D}^u$ の臨界点の存在が分かる。このことについては §10 [FOOO2] を見られたい。

$\mathfrak{P}\mathfrak{D}^u$ が臨界点 $b \in H^1(L(u); \Lambda_0)$ を持つような $u \in \text{Int}P$ を持つかどうかについては以下のことが分かる。 $\mathfrak{M}(X)$ を $(u, [b]) \in \text{Int}P \times H^1(L(u); \Lambda_0)/2\pi\sqrt{-1}H^1(L(u); \mathbf{Z})$ で、

⁶この事実は Fano 性を仮定しないと反例がある (Example 8.2 Case (3) [FOOO2])。

⁷これら $\pi_2(X)$ 上に定める準同型が等しいことで十分である

⁸これらが $\pi_2(X, L)$ 上に定める準同型が等しいことで十分である。

$HF((L(u), b); \Lambda_0) \neq 0$ であるものの集合とする。また、 (X, ω) の量子 cohomology 環を $QH(X; \Lambda)$ とする。

定理 3.6. (*Theorem 1.3* [FOOO2] (Fano の場合) , *Theorem 1.3* [FOOO5])

$$\mathfrak{M}(X) \cong \text{Hom}_\Lambda(QH(X; \Lambda), \Lambda)$$

ここで右辺は Λ 上の代数としての (非自明な) 準同型の集合を表し、空集合とはならない。特に \mathfrak{PD} の臨界点が全て非退化であれば、

$$\#\mathfrak{M}(X) = \sum \dim H^p(X; \mathbf{C})$$

が成り立つ。

この定理は 次節で述べる bulk 変形をした場合にも成り立つ *Theorem 1.3* [FOOO5]。

4. BULK 変形

X の量子 cohomology 環の積構造や $L(u)$ に付随したフィルター付 A_∞ -代数の構造は X の cocycle を用いて変形することができる。

$B(H^2(X; \Lambda_0)[2])$ を対称化したものを $E(H(X; \Lambda_0)[2])$ と書く。

$\mathcal{M}_{k+1, \ell}(\beta)$ で境界上の点 (z_0, \dots, z_k) のみでなく、 Σ の内点 z_1^+, \dots, z_ℓ^+ も付いた境界付安定写像で β を表すもののなす moduli 空間を表す。 $z_0, \dots, z_k, z_1^+, z_\ell^+$ で値を取ることで、

$$ev_j : \mathcal{M}_{k, \ell}(\beta) \rightarrow L(u), j = 0, \dots, k, \quad ev_i^+ : \mathcal{M}_{k, \ell}(\beta) \rightarrow X, i = 1, \dots, \ell$$

が定まる。これを用いて

$$q_{k, \ell} : E_\ell(H(X; \Lambda_0)[2]) \otimes B_k(\mathcal{H}(L(u); \Lambda_0)[1]) \rightarrow \mathcal{H}(L(u); \Lambda_0)[1]$$

を

$$q_{k, \ell}([\mathbf{y}_1 \times \dots \times \mathbf{y}_\ell] \otimes \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_k) = (ev_0)! \left(\prod_{i=1}^{\ell} (ev_i^{+*} \mathbf{y}_i) \prod_{j=1}^k (ev_j^* \xi_j) \right)$$

と定義する。([FOOO3] では Poincaré 双対な T^n -不変 cycle を用いて bulk 変形をしている。微分形式を用いれば \mathbf{y}_i は toric 因子の近傍に support を持つ T^n -不変な Thom 形式を取ることにあたる。)

これを用いて $\{\mathfrak{m}_k\}_{k \geq 0}$ は X の T^n -不変 cocycle \mathfrak{b} により、

$$\mathfrak{m}_k^{\mathfrak{b}}(\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_k) = \sum_{\ell} q_{k, \ell}(\mathfrak{b}^{\otimes \ell} \otimes \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_k)$$

と変形され、 $\{\mathfrak{m}_k^{\mathfrak{b}}\}_{k \geq 0}$ も $\mathcal{H}(L(u); \Lambda_0)$ 上にフィルター付 A_∞ -代数の構造を与えることが分かる [FOOO1], [FOOO3]。これを、cycle \mathfrak{b} による bulk 変形と呼ぶ。 \mathfrak{b} で bulk 変形された $L(u)$ に付随したフィルター付 A_∞ -代数の場合にも、 $\mathfrak{m}_0^{\mathfrak{b}}(1)$ は $PD[L(u)]$ の Λ_0 スカラー倍になるので、potential 関数 $\mathfrak{PD}_{\mathfrak{b}}^u : H^1(L(u); \Lambda_0) \rightarrow \Lambda_0$ が定まる。即ち、 $\mathfrak{PD}^u(x_1, \dots, x_n)$ あるいは $W^u(y_1, \dots, y_n)$ は $\mathfrak{b} \in H(X; \Lambda_0)$ により $\mathfrak{PD}_{\mathfrak{b}}^u(x_1, \dots, x_n)$ あるいは $W_{\mathfrak{b}}^u(y_1, \dots, y_n)$ に変形される。一般の compact toric 多様体の場合には、potential 関数は無限個の項の和として書かれるため、Jacobi 環 $\text{Jac}(W_{\mathfrak{b}})$ の定義は注意を要する。それについては Definition 2.8 [FOOO5] とそれに続く記述を参照されたい。

量子 cohomology 環の積構造も cocycle \mathfrak{b} により変形される。 \mathfrak{b} で変形された量子 cohomology 環を $QH^{\mathfrak{b}}(X; \Lambda_0)$ と書く。こうして得られた関数族は \mathfrak{W}^u の普遍変形族を与えることが分かる §11 [FOOO5]。この変形の微分をとることで得られる $\mathfrak{t}_5 : QH(X; \Lambda_0) \rightarrow \text{Jac}(W_6^u)$ について次が成り立つ。

定理 4.1. (*Theorem 2.28, 2.31* [FOOO5]) $\mathfrak{t}_5 : QH(X; \Lambda_0) \rightarrow \text{Jac}(W_6^u)$ は Λ_0 上の環同型を与える。

量子 cohomology 環とある関数の Jacobi 環が環同型になることについては、 X が toric Fano 多様体の場合には Batyrev [B], Givental [Gi1], [Gi2] などの結果があり、Novikov 環係数での主張は [FOOO2] で示された。我々の研究では、その関数は Lagrangian torus fiber の Floer 理論に現れる potential 関数として現れる。

5. いくつかの応用

Lagrange 部分多様体 L_0, L_1 ⁹ が横断的に交わる¹⁰とすると、 $L_0 \cap L_1$ で生成された Λ_0 -加群には L_1, L_0 に付随した2つのフィルター付 A_∞ -代数上のフィルター付 A_∞ -双加群の構造が入る。ここでも、 X の cycle \mathfrak{b} を用いてフィルター付 A_∞ -代数とその上の双加群の構造を一斉に変形できる。特に X の cycle \mathfrak{b} で変形された L_i に付随したフィルター付 A_∞ -加群についての $m_0^{\mathfrak{b}, b_i}$, $i = 0, 1$ が unit の定数倍になり、その値、即ち potential 関数の値が一致しているとするとき、 $\mathfrak{b}, (L_0, b_0), (L_1, b_1)$ の Floer cohomology $HF((L_0, \mathfrak{b}, b_0), (L_1, \mathfrak{b}, b_1); \Lambda_0)$ を定義できる。係数環を Λ_0 としたままでは、Hamilton 変形での不変性は言えないが、係数環を Λ に拡大すると Hamilton 不変性を示すことができる。このことを用いると、前節までに述べた結果から次のことが分かる。

定理 5.1. compact toric 多様体 (X, ω) は Lagrangian torus fiber $L(u)$ で、Hamilton 変形で自分自身から外すことのできないもの¹¹を含む。

定理 3.5 より、monotone な場合には monotone な Lagrangian torus fiber がこの性質を持つことが分かる。また、compact toric 多様体で複数の non-displaceable Lagrangian torus fiber を持つものの存在も示すことができる。そのような Lagrange torus fiber が連続濃度現れることもある。例を後にいくつかつける。

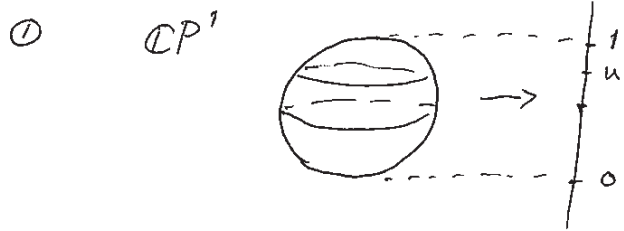
これらの他の応用として、ある compact toric 多様体 (X, ω) 、例えば、 $\mathbb{C}P^2$ の2点 blow-up とその上の特別な Kähler 形式を symplectic 形式としたもの、の Hamilton 微分同相写像群 (の普遍被覆群) 上の Calabi quasimorphism で“独立”なものを無限個構成できることや、 (X, ω) の深谷圏が Floer cohomology の消えていない (L, b) 達から本質的に生成されること (M. Abouzaid 氏と我々4人の共著として発表する予定) などもある。

⁹正確には pair として relative spin 構造をもつことを仮定する。

¹⁰ここでの構成は交わり方が clean intersection であるという状況にも拡張できる

¹¹即ち $L \cap \phi(L) \neq \emptyset$ が全ての Hamilton 微分同相写像に対して成り立つもの。この性質を満たすとき non-displaceable Lagrange 部分多様体と呼ばれる。

1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a 1311



$$PO^u(x_1, \dots, x_n) = W^u(y_1, \dots, y_n)$$

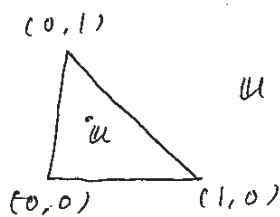
$$W^u(y) = y T^u + y^{-1} T^{1-u}$$

$$\frac{\partial W^u(y)}{\partial y} = T^u - y^{-2} T^{1-u} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

② $\mathbb{C}P^2$

moment polytope $P = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_1 + u_2 \leq 1\}$

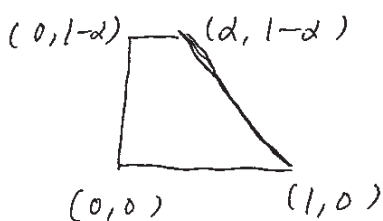


$$u = (u_1, u_2) \quad W(y_1, y_2) = y_1 T^{u_1} + y_2 T^{u_2} + (y_1, y_2)^{-1} T^{1-u_1-u_2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial W^u}{\partial y_1} = T^{u_1} - y_1^{-2} y_2^{-1} T^{1-u_1-u_2} = 0 \\ \frac{\partial W^u}{\partial y_2} = T^{u_2} - y_1^{-1} y_2^{-2} T^{1-u_1-u_2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = u_2 = \frac{1}{3} \\ y_1 = y_2, \quad y_1^3 = 1 \end{cases}$$

③ 1 point blow-up of $\mathbb{C}P^2$

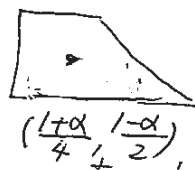
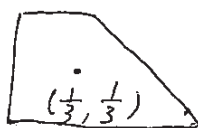
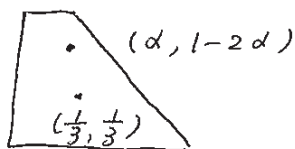


$$W^u(y_1, y_2) = y_1 T^{u_1} + y_2 T^{u_2} + (y_1, y_2)^{-1} T^{1-u_1-u_2} + y_2^{-1} T^{1-d-u_2}$$

③-1 $0 < \alpha < \frac{1}{3}$

③-2 $\alpha = \frac{1}{3}$ (monotone)

③-3 $\frac{1}{3} < \alpha < 1$



$HF(L(u), b) \neq 0$ for u a 位 $\frac{1}{3}$

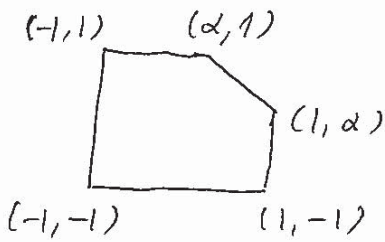
for $\exists a \in \mathbb{Z}$ for $[b]$ a 回数 \neq

$(\alpha, 1-2\alpha)$ 1 \rightarrow
 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 3 \rightarrow

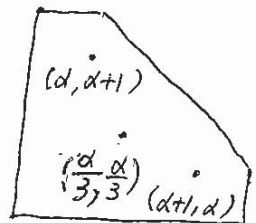
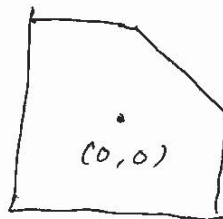
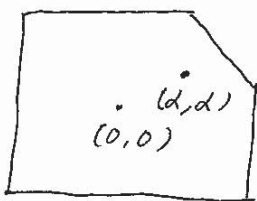
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 4 \rightarrow

$(\frac{1+\alpha}{4}, \frac{1-\alpha}{2})$ 4 \rightarrow

④ 2-point blow-up (I)



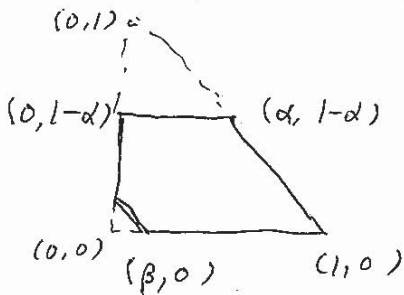
④-1 $0 < \alpha < 1$ ④-2 $\alpha = 0$ (monotone) ④-3 $-1 < \alpha < 0$



$HF(L(u), b) \neq 0$ となる α の位 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (α, α) 1 \rightarrow $(0, 0)$ 5 \rightarrow

$(d, d+1)$ 1 \rightarrow
 $(\alpha+1, \alpha)$ 1 \rightarrow
 $(\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3})$ 3 \rightarrow

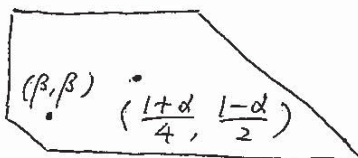
⑤ 2-point blow-up (II)



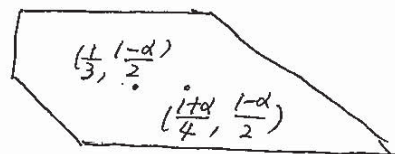
$0 < \beta < 1-d$

$\beta < \frac{1-\alpha}{2}$ α と β

$\beta = \frac{1-\alpha}{2}$ α と β



$(\frac{1+\alpha}{4}, \frac{1-\alpha}{2})$ 4 \rightarrow
 (β, β) 1 \rightarrow



$(\frac{1}{3}, \frac{1-\alpha}{2})$ 3 \rightarrow
 $(\frac{1+\alpha}{4}, \frac{1-\alpha}{2})$ 2 \rightarrow

(注) bulk 変形に用いる t は $\beta = \frac{1-\alpha}{2}$ α と β

$u = (t, \frac{1+\alpha}{2})$, $\frac{1-\alpha}{2} < t \leq \frac{1+\alpha}{4}$ α と β に対する bulk $\frac{1}{2}$ 変形
 での $HF \neq 0$ となる。 [F0003]

REFERENCES

- [B] V. Batyrev, *Quantum cohomology rings of toric manifolds*, Journées de Geometrie Algebrique d'Orsay, 1992, Asterisque 218, 9-34.
- [Cho1] C.-H. Cho, *Holomorphic discs, spin structures and the Floer cohomology of the Clifford torus*, Internat. Math. Res. Notices 35 (2004), 1803-1843.
- [Cho2] C.-H. Cho, *Products of Floer cohomology of torus fibers in toric Fano manifolds*, Commun. Math. Phys. 260 (2005) 613–640, math.SG/0412414.
- [Cho3] C.-H. Cho, *Non-displaceable Lagrangian submanifolds and Floer cohomology with non-unitary line bundle*, J. Geom. Phys. 58 (2008), 1465–1476, arXiv:0710.5454, arXiv:0710.5454.
- [CO] C.-H. Cho and Y.-G. Oh, *Floer cohomology and disc instantons of Lagrangian torus fibers in Fano toric manifolds*, Asian J. Math. 10 (2006), 773-814.
- [Fl] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, J. Differ. Geom. 28 (1988), 513-547.
- [FOOO1] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory-anomaly and obstruction*, AMS/IP Studies in Advanced Math. 46, International Press/ Amer. Math. Soc. (2009).
- [FOOO2] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds I*, Duke Math. J. 151 (2010), 23-174.
- [FOOO3] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds II: bulk deformation*, submitted, arXiv:0810.5774.
- [FOOO4] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Toric degeneration and non-displaceable Lagrangian tori in $S^2 \times S^2$* , submitted, arXiv:1002.1660.
- [FOOO5] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds*, in preparation.
- [Gi1] A. Givental, *Homological geometry and mirror symmetry*, in “Proceeding of the ICM-1994, Zürich, Basel, 1995, 472 - 480.
- [Gi2] A. Givental, *A mirror theorem for toric complete intersections*, Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996), 141–175, Progr. Math., 160, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998.

球面内の等径超曲面と運動量写像: Hermite 対称空間の場合*

藤井 忍[†] (広島大学大学院理学研究科 / 大阪市立大学数学研究所)

概要

本講演の内容は田丸博士氏 (広島大) との共同研究に基づく。本講演では、4つの主曲率をもつ、球面内の等質等径超曲面を定義する等径関数と、コンパクトで既約な階数2の Hermite 対称空間の等方表現の運動量写像の関係について述べる。

1 球面内の等径超曲面

本講演の主定理は以下である:

主定理 (F. and Tamaru [3]). G/K を階数2のコンパクト既約 Hermite 対称空間、すなわち以下のいずれかとする:

- (1) $SO(n+2)/SO(2) \times SO(n)$,
- (2) $SU(n+2)/S(U(2) \times U(n))$,
- (3) $SO(10)/U(5)$,
- (4) $E_6/U(1) \times Spin(10)$.

さらに、 $\mu: \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ を G/K の等方表現に付随する運動量写像とする。このとき、 \mathfrak{k}^* 上の K -不変ノルム $\|\cdot\|$ で、 $\|\mu(P)\|^2$ (ただし $P \in \mathfrak{p}$) が4次の Cartan–Münzner 多項式になるものが存在する。

球面 S^n 内の**等径超曲面**とは、 $(S^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 上の等径関数 $\varphi: S^n \rightarrow \mathbb{R}$ のレベル集合として定義される余次元1の部分多様体である。球面 S^n 上の等径関数 $\varphi: S^n \rightarrow \mathbb{R}$ は、以下を

* 第57回幾何学シンポジウム (於 神戸大学, 2010年8月6日–9日) 講演予稿.

[†] E-mail address: shinofu@hiroshima-u.ac.jp

満たす g 次斉次多項式関数 $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ を S^n 上に制限することで得られることが知られている:

$$(*) \quad \begin{cases} \|\text{grad } f(P)\|^2 = g^2 \|P\|^{2g-2}, \\ \Delta f(P) = \frac{m_2 - m_1}{2} g^2 \|P\|^{g-2}. \end{cases}$$

ここで, g は異なる主曲率の個数で, $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ である. また, m_i は主曲率を $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_g$ としたときの, m_1, m_2 の重複度である. このような斉次多項式を **Cartan–Münzner 多項式** という.

等径超曲面の基本的性質等については尾関–高木–竹内 [5] や宮岡 [4] 等を参照していただきたい. 4つの主曲率をもつ, 球面内の等径超曲面のうち, 現在知られているものは, 以下に挙げる階数 2 の対称空間の等方表現の主軌道として得られるものと, OT–FKM 型等径超曲面と呼ばれる, Clifford 代数の表現から構成されるものである:

- (1) $\text{SO}(2+n)/\text{SO}(2) \times \text{SO}(n)$,
- (2) $\text{SU}(2+n)/\text{S}(\text{U}(2) \times \text{U}(n))$,
- (3) $\text{SO}(10)/\text{U}(5)$,
- (4) $\text{E}_6/\text{U}(1) \times \text{Spin}(10)$,
- (5) $\text{Sp}(2+n)/\text{Sp}(2) \times \text{Sp}(n)$,
- (6) $\text{SO}(5) \times \text{SO}(5)/\text{SO}(5)$.

このうち, (1) から (4) までは Hermite 対称空間である.

我々は 4つの主曲率を持つ, 球面内の等径超曲面に興味を持っている. 特に「4つの主曲率を持つ球面内の等径超曲面は, 等質か非等質かに依らずに, 全て運動量写像と関係するだろう」と予想をしていて, その研究を行っている. もし, この両者が関係あれば, その関係を利用して球面内の等径超曲面の統一的かつ幾何学的手法による分類が出来るのではないかと期待している.

2 Hermite 対称空間の等方表現の運動量写像

本節では, 運動量写像の定義とその性質について簡単にまとめ, 主定理の仮定を**古典型**の場合に制限した結果を述べておく.

定義 1.

- (1) $2n$ 次元 C^∞ -多様体 M と, M 上の微分 2-形式 ω で, $d\omega = 0$ かつ $\omega^n \neq 0$ なるものの組 (M, ω) を**シンプレクティック多様体**といい, ω を M の**シンプレク**

ティック形式という.

(2) Lie 群 K のシンプレクティック多様体 (M, ω) への作用が **Hamilton 的**であるとは, 以下を満たすことをいう:

- (i) K -作用はシンプレクティック形式 ω を保つ,
- (ii) 運動量写像 $\mu : M \rightarrow \mathfrak{k}^*$ が存在する.

ただし, \mathfrak{k}^* は K の Lie 代数 \mathfrak{k} の線型空間としての双対空間である. ここで写像 $\mu : M \rightarrow \mathfrak{k}^*$ が**運動量写像**であるとは,

- (a) $(d\mu)_P(Q)(\xi) = \omega_P(\tilde{\xi}_P, Q)$ for $P \in M, Q \in T_P M, \xi \in \mathfrak{k}$,
- (b) $\mu(a.P) = a.\mu(P)$ for $P \in M, a \in K$

を満たすときをいう. ここで $\tilde{\xi}$ は以下で定義される M 上のベクトル場である:

$$M \ni P \mapsto \left. \frac{d}{dt} \exp(t\xi).P \right|_{t=0} \in T_P M.$$

運動量写像の性質 (b) は, 運動量写像は K -同変写像であることを意味する.

さて, 階数 2 の Hermite 対称空間の等方表現について考える. 階数 2 の Hermite 対称空間 G/K の等方表現の主 K -軌道が球面内の等質等径超曲面となることが知られている (特に 4 つの主曲率を持つものである). 定義からこの軌道は適当な等径関数 $\varphi : \mathfrak{p} \rightarrow \mathbb{R}$ のレベル集合である. ここで \mathfrak{p} は \mathfrak{g} の線型部分空間であって, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を満たすものである. さらに, この φ に対応する 4 次の Cartan–Münzner 多項式 f が存在する. 注目すべきは f が K -不変であることである. 一方で, 階数 2 の Hermite 対称空間 G/K の等方表現が Hamilton 作用であることが知られている. したがって, 運動量写像 $\mu : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{k}$ が存在する. 運動量写像は K -同変写像であり, 適当な K -不変ノルム $\|\cdot\|^2$ との合成を考えることで 4 次の K -不変式を得る.

この 2 つの K -不変式の関係について述べたのが定理 2 および主定理である.

定理 2 (F. [2]). G/K を階数 2 の**古典型**コンパクト既約 Hermite 対称空間 (つまり, 主定理内で挙げた階数 2 の対称空間のリストの (1), (2), (3) のいずれか) とする. このとき,

- (1) 等方表現 $K \overset{\text{Ad}}{\curvearrowright} \mathfrak{p}$ は ω を保つ,
- (2) 運動量写像 $\mu : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{k}$ は $\mu(P) = \frac{1}{2}[P, [P, Z]] \in \mathfrak{k}$ と書ける,
- (3) $\|\mu(P)\|^2$ が 4 つの主曲率をもつ球面内の等質等径超曲面を定義する Cartan–Münzner 多項式になるような \mathfrak{k}^* 上の K -不変ノルム $\|\cdot\|$ が存在する.

ただし, Z は $J := \text{ad}_Z|_{\mathfrak{p}}$ が \mathfrak{p} 上の複素構造を定めるような \mathfrak{g} の元である. また, \mathfrak{g} の Killing 形式から定まる \mathfrak{k}^* 上の K -不変内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ によって $\mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{k}$ とみなしている. \mathfrak{p} 上

のシンプレクティック形式 ω は $\omega(x, y) := \langle J(x), y \rangle$ で定義する.

注意 3.

- (1) 定理 2 で計算して得た Cartan–Münzner 多項式は, 尾関–竹内 [7] で計算されているものと本質的には同じものである (違いは \mathfrak{k}^* 上の K -不変内積の取り方と計算方法である).
- (2) 定理 2 (2) の運動量写像の記述は Hermite 対称空間の等方表現について成立し, G/K の階数や古典型・例外型といった性質には依らない.

3 主定理の証明の概略

本節では, 主定理の証明の概略を説明する.

定理 2 の証明は, 扱っている Hermite 対称空間が “古典型”, つまり “行列で表せる” ということに頼っているため, 例外型 $E_6/U(1) \times \text{Spin}(10)$ に関して同様の方法では計算できない. そこで, 定理 2 を行列の言葉に頼らずに証明する必要がある.

そのために定理 2 (3) の証明について簡単に説明する. G/K は Hermite 対称空間ゆえ, Lie 代数として $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{k}'$ を満たすような \mathfrak{k} の Lie 部分代数 \mathfrak{k}' が存在する. このとき \mathfrak{g} の Killing 形式 B と実数 a, b に対して

$$a B|_{\mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{u}(1)}(\cdot, \cdot) + b B|_{\mathfrak{k}' \times \mathfrak{k}'}(\cdot, \cdot)$$

は \mathfrak{k} 上の内積を定める. そこで, 運動量写像 μ の, 上で定めた内積に関するノルム 2 乗関数を

$$\begin{aligned} f_{a,b}(P) &= a B|_{\mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{u}(1)}(\mu(P), \mu(P)) + b B|_{\mathfrak{k}' \times \mathfrak{k}'}(\mu(P), \mu(P)) \\ &= -a \|\mu_1(P)\|^2 - b \|\mu_2(P)\|^2 \end{aligned}$$

と定義する. ただし,

$$p_1 : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{u}(1), \quad p_2 : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{k}'$$

をそれぞれ \mathfrak{k} の $\mathfrak{u}(1)$, \mathfrak{k}' への標準的射影とし, $\mu_1 := p_1 \circ \mu$, $\mu_2 := p_2 \circ \mu$ である. 主定理の主張は「上手く a, b を選べば $f_{a,b}(P)$ が 4 次の Cartan–Münzner 多項式になる」ということと同値である. この主張を確かめるためには \mathfrak{p} の正規直交基底 $\{P_i\}$ に対して $\|\text{grad } f_{a,b}(P)\|^2$, $\Delta f_{a,b}(P)$ を計算し, 4 次の Cartan–Münzner 多項式の条件式 (*) と比較すれば良い. 論文 [2] での定理 2 の証明は, 各 G/K ごとに \mathfrak{p} の正規直交基底を一つ固定し, それを具体的に行列で表記して計算している. 例外型の場合にはこのような計算は

出来ないので、正規直交基底を具体的に記述しない計算法が必要なのだが、その鍵となるのが以下に挙げる命題である。これは階数 2 の古典型 Hermite 対称空間の等方表現の不変式環が 2 変数実係数多項式環であり、特にその生成系として $\{\|P\|^2, \|\mu(P)\|^2\}$ が取れることから予想されたものである。

命題 4 ([3]). G/K を階数 2 のコンパクト既約 Hermite 対称空間とすると、以下を満たす $\alpha = \alpha(m_1, m_2)$, $\beta = \beta(m_1, m_2)$, $\gamma = \gamma(m_1, m_2) \in \mathbb{R}$ が存在する (m_1, m_2 は主曲率の重複度, その他の記号は上と同様):

- (1) $\|\text{grad } f_{a,b}(P)\|^2 = \alpha \|P\|^6 + \beta \|P\|^2 \|\mu(P)\|^2,$
- (2) $\Delta f_{a,b}(P) = \gamma \|P\|^2.$

参考文献

- [1] Ferus, D., Karcher, H. and Münzner, H. F., “Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen”, *Math. Z.*, **177** (1981), 479–502.
- [2] Fujii, S., “Homogeneous isoparametric hypersurfaces in spheres with four distinct principal curvatures and moment maps”, *Tohoku Math. J.*, **62** (2010), 191–213.
- [3] Fujii, S. and Tamaru, H., “Moment maps and isoparametric hypersurfaces in spheres—Hermitian case”, in preparation.
- [4] 宮岡 礼子, “等径超曲面再訪”, *数学* **53** (2001), 18–33.
- [5] 尾関 英樹, 高木 亮一, 竹内 勝, “等径超曲面について”, *数学* **30** (1978), 23–32.
- [6] Ozeki, H. and Takeuchi, M., “On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres I”, *Tôhoku Math. J.* **27** (1975), 515–559.
- [7] ———, “On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres II”, *Tôhoku Math. J.* **28** (1976), 7–55.

概均質ベクトル空間と等質空間上の不変平坦な幾何構造

加藤宏尚

幾何学シンポジウム 2010年8月8日

概要

等質空間上での不変平坦な射影構造の存在・非存在問題を考える。これを特に概均質ベクトル空間と対応する等質空間上の不変な GL 構造の枠組みにおいて考察する。

1 導入

多様体上では様々な幾何構造が考えられるが、本稿ではアトラスによって記述される幾何構造を考える。例えば実多様体上の定曲率リーマン構造や平坦なアファイン構造、平坦な射影構造などが挙げられる。これらの中でも平坦な射影構造は最も存在しやすい幾何構造である。実際、実多様体 M 上の定曲率リーマン構造や平坦なアファイン構造は、 M 上の平坦な射影構造を誘導する。一方でリー群の等質空間 G/H 上では G の群構造と適合した幾何構造を考える。この G の作用で不変な幾何構造はリー群やリー環の表現と密接に関係する。実際例えば阿賀岡芳夫氏 [1] は実等質空間上の不変平坦な実射影構造とあるリー環準同型写像が対応することを示している。そして存在・非存在問題に関して、[1], [9], [3] により不変平坦な実射影構造を許容する実単純リー群は分類されており、その結果は $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbf{R})$ と $\mathfrak{su}^*(2n)$ ($n \geq 1$) で尽くされる。また [9] においては不変平坦な射影構造を許容する既約な単連結リーマン対称空間が分類されている。実半単純リー群に関しては $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \oplus \mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$ 上に不変平坦な実射影構造の存在を確認したが [2]、一般の半単純リー群や、等質空間に関して分類は未解決である。

本稿では等質空間 G/H 上の平坦な射影構造が G 不変であるという条件は、概均質ベクトル空間の言葉で適切に記述されることを見る。またその応用として既約で不変平坦な複素射影構造を許容する複素リー群の分類を行う。

2 準備

本節では後の話に必要な幾何学的準備を行う。本稿で扱う複素多様体 M 上の幾何構造は、複素リー群 A とその閉部分群 B の組で $\dim A/B = \dim M$ をみたすものにより与えられる。ここではさらに次の条件を要請する。 A の等質空間 A/B 上への作用は局所的に決定される。即ち A の元 a に対して、ある開集合 U が存在し a は U 上の恒等変換を与えるならば a は単位元であ

る. こうした条件をみたすモデル空間 $(A, A/B)$ に基づき幾何構造を定義する. つまり M 上の $(A, A/B)$ 構造とは, 次の条件をみたす極大アトラス $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ である:

1. φ_α は U_α から A/B のある開集合の上への双正則な写像である.
2. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ が空でないような全ての組 (α, β) に対して, $U_\alpha \cap U_\beta$ の各連結成分 C 上, 座標変換 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ はある A の元 $\tau(C; \beta, \alpha)$ によって与えられる.

次に導入するカルタン構造は幾何構造を研究するのに重要な手段を提供する. 今 P を M 上の構造群 B の主ファイバー束, そして ω を A のリー環 \mathfrak{a} に値をとる P 上の接続形式とする. 次の条件をみたす (P, ω) の組を M 上の A/B 型のカルタン構造という.

1. B の元 b に対して $R_b^* \omega = \text{Ad}(b^{-1})\omega$ が成り立つ.
2. リー環 \mathfrak{b} の元 Y とその基本ベクトル場 Y^* に対して, $\omega(Y^*) = Y$ が成り立つ.
3. P の各元 u に対して, $\omega_u : T_u P \rightarrow \mathfrak{a}$ は線形同型写像である.

(P, ω) は等式 $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$ が成り立つとき平坦という. このとき次が成り立つ. カルタン構造の同型については [4] を参照のこと.

定理 1 M 上の $(A, A/B)$ 構造は M 上の A/B 型の平坦なカルタン構造の同型類と一対一に対応する.

M が複素等質空間 G/H のとき, G の元 g は等質空間 G/H 上に左移動 L_g を通して作用した. ここで G/H 上の $(A, A/B)$ 構造 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ は次の条件をみたすとき (群 G の作用に関して) 不変であると言う: G の任意の元 g に対して, $U_\alpha \cap L_g^{-1}(U_\beta)$ の各連結成分上, 座標変換 $\varphi_\beta \circ L_{g^{-1}} \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は G の元により与えられる. このとき対応するカルタン構造 (P, ω) の群 G に関する不変性は次の条件で与えられる. それは群 G の P への左作用 $L \times P \ni (a, u) \rightarrow L_a'(u) \in P$ が存在して以下の条件をみたす. L の任意の元 a に対して L_a' はバンドル同型写像を与えカルタン接続 ω を保つ, 即ち $L_a'^* \omega = \omega$ が成り立つ. またファイバー束の射影 $\pi_P : P \rightarrow G/H$ は群 G の作用と可換である, 即ち $\pi_P \circ L_a' = L_a \circ \pi_P$. このとき定理 1 と同様に次が成り立つ.

定理 2 等質空間 G/H 上の不変な $(A, A/B)$ 構造は, G/H 上の A/B 型の不変平坦なカルタン構造の同型類と一対一に対応する

G のリー環を \mathfrak{g} , H のリー環を \mathfrak{h} とする. ここで Mendez, Lopera による次の定理を参照する.

定理 3 ([7]) 実等質空間 G/H 上の A/B 型の不変平坦なカルタン構造があるリー環準同型写像 $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{a}$ を誘導する. また逆にリー環準同型写像 $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{a}$ が $f(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{b}$ をみたし, f を通して $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ とベクトル空間として同型になるとき, 単連結実等質空間 G/H 上には不変平坦なカルタン構造が存在する.

この条件をみたすリー環準同型写像を (A/B) -homomorphism と言う. また 2 つの (A/B) -homomorphism f_1, f_2 が同値であるとは, ある B の元 b が存在して $f_2 = \text{Ad}(b)f_1$ が成り立

つときを言う．上述した等質空間上の不変平坦なカルタン構造の同型類と不変な $(A, A/B)$ 構造の対応を用いることで次が示される：

定理 4 G を単連結複素リー群， H を連結な G のリー部分群とする．このとき G/H 上の不変な $(A, A/B)$ 構造全体は，リー環 \mathfrak{g} の (A/B) -homomorphism の同値類全体と一対一に対応する ([6])．また H が単位元のみからなるとき， G に対して単連結の仮定は必要でない ([4])．

3 概均質ベクトル空間に付随する等質空間上の幾何構造

本稿で重要な幾何構造について記述する．まず n 次元射影変換群 $PGL(\mathbf{C}^{n+1}) := GL(\mathbf{C}^{n+1})/\mathbf{C}^\times I$ と n 次元射影空間 $P(\mathbf{C}^{n+1})$ の組からなるモデル空間 $(PGL(\mathbf{C}^{n+1}), P(\mathbf{C}^{n+1}))$ を考えたとき， n 次元複素多様体 M 上の $(PGL(\mathbf{C}^{n+1}), P(\mathbf{C}^{n+1}))$ 構造は平坦な複素射影構造と呼ばれた．平坦な射影構造は重要な部分幾何構造を多く持つ．ここでモデル空間 $(A', A'/B')$ が $(A, A/B)$ の部分幾何であるとは次の条件をみたすときを言う：リー群の準同型写像 $\iota: A' \rightarrow A$ が存在し，その微分は単射である．そして B' は B のリー部分群であり， A'/B' と A/B の次元は等しい．多様体 M 上の $(A', A'/B')$ 構造 $\{(V_\lambda, \psi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が M 上の $(A, A/B)$ 構造 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ の部分幾何構造であるとは，モデル空間 $(A', A'/B')$ が $(A, A/B)$ の部分幾何であり， $\{(V_\lambda, \psi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が M 上の $(A, A/B)$ 構造を誘導する時をいう．

実際例えば実射影幾何 $(PGL(\mathbf{R}^{n+1}), P(\mathbf{R}^{n+1}))$ の部分幾何として，アファイン幾何 $(Aff(\mathbf{R}^{n+1}), \mathbf{R}^{n+1})$ やユークリッド幾何 $(Euc(\mathbf{R}^{n+1}), \mathbf{R}^n)$ ，球面幾何 $(O(\mathbf{R}^{n+1}), S^n)$ ，双曲幾何 $(SO^+(\mathbf{R}_1^{n+1}), H^n)$ などがある．これに対応して，実多様体 M 上の平坦な実射影構造は， M 上の平坦な実アファイン構造や平坦なリーマン構造，球面構造（正の定曲率リーマン幾何構造），双曲構造（負の定曲率リーマン幾何構造）など多くの幾何構造を誘導する．

ここまでは固定した多様体 M 上で平坦な射影構造とその部分幾何構造を考えた．次に M 上の平坦な複素射影構造からは，1次元高い複素多様体 $M \times \mathbf{C}^\times$ 上に以下で記述される幾何構造 (GL 構造) が誘導されることを見る．

今 $\pi: \mathbf{C}^{n+1} - \{0\} \ni v \mapsto \bar{v} \in P(\mathbf{C}^{n+1})$ を自然な射影とし， $PGL(\mathbf{C}^{n+1})_{\bar{v}}$ を \bar{v} における $PGL(\mathbf{C}^{n+1})$ の固定部分群とする．このとき複素射影空間 $P(\mathbf{C}^{n+1})$ は等質空間 $PGL(\mathbf{C}^{n+1})/PGL(\mathbf{C}^{n+1})_{\bar{v}}$ の表示を持つ．また同様にして $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ は等質空間 $GL(\mathbf{C}^{n+1})/GL(\mathbf{C}^{n+1})_v$ の表示を持つ．このとき次が成り立つ．

命題 1 n 次元複素多様体 M 上の平坦な射影構造から， $M \times \mathbf{C}^\times$ 上に $(GL(\mathbf{C}^{n+1}), \mathbf{C}^{n+1} - \{0\})$ 構造が誘導される．

命題 1 の証明の概略を述べる．まず定理 1 から M 上の平坦な射影構造はある $PGL(\mathbf{C}^{n+1})/PGL(\mathbf{C}^{n+1})_{\bar{v}}$ 型の平坦なカルタン構造 (P, ω) と対応した．このとき $P \times \mathbf{C}^\times$ は定空間が $M \times \mathbf{C}^\times$ で構造群が $PGL(\mathbf{C}^{n+1})_{\bar{v}}$ の主ファイバー束となり．そして \mathbf{C}^\times の Maurer-Cartan 形式を $\omega_{\mathbf{C}^\times}$ と書くとき， $\xi_{(u, \lambda)} := \omega_u \oplus \omega_{\mathbf{C}^\times} : T_{(u, \lambda)}P \times \mathbf{C}^\times \rightarrow \mathfrak{sl}(\mathbf{C}^{n+1}) \oplus \mathbf{C}$ とする．このとき

$(P \times \mathbf{C}^\times, \xi)$ は $GL(\mathbf{C}^{n+1})/GL(\mathbf{C}^{n+1})_v$ 型の平坦なカルタン構造を与える。 \square

ここで得られた $(GL(\mathbf{C}^{n+1}), \mathbf{C}^{n+1} - \{0\})$ 構造を GL 構造と呼ぶ。特に等質空間上の GL 構造は概均質ベクトル空間と対応する。ここで概均質ベクトル空間とは G を複素リー群, ρ をその正則表現, V を表現空間としたときの 3 つ組み (G, ρ, V) で, ユークリッド位相に関する開軌道 $\rho(G)v$ を持つものを言う。またこのような v のことを生成点と言う。

3 つ組 (G, ρ, V) が概均質であるか否かについては, 線形代数群の概均質ベクトル空間のときと同様の無限小の条件で特徴付けられる。即ち (G, ρ, V) が概均質ベクトル空間であることは, その無限小の表示 $\text{Lie}(G, \rho, V) = (\mathfrak{g}, d\rho, V)$ について $d\rho(\mathfrak{g})v = V$ が成り立つことと同値である。そこで無限小の 3 つ組 (\mathfrak{g}, f, V) (又はリー環の表現 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$) で, ある V の元 v が存在して $f(\mathfrak{g})v = V$ をみたすものも概均質ベクトル空間と言う。このとき定理 4 を用いて以下の定理 5 が得られる。この定理において複素等質空間 G/H は定理 4 と同様の条件をみたし, $\dim G/H = n$ とする。また $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbf{C}^{n+1})$ をリー環の表現, v を \mathbf{C}^{n+1} の元とすると, v における等方部分代 \mathfrak{g}_v は部分代数 $\{X \in \mathfrak{g} \mid f(X)v = 0\}$ のことであるが, 射影等方部分代数を $\mathfrak{g}_{\bar{v}} := \{X \in \mathfrak{g} \mid f(X)v \in \langle v \rangle\}$ で定義する。そして $\mathfrak{gl}(n)$ の恒等表現を $\Lambda_1: \mathfrak{gl}(n) \rightarrow \mathfrak{gl}(n)$ で表す。

定理 5 G/H 上の GL 構造全体は次の商集合と一対一に対応する。

$$\{(f, v) \mid f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbf{C}^{n+1}) \text{ は概均質ベクトル空間, } f(\mathfrak{g})v = \mathbf{C}^{n+1}, \mathfrak{g}_v = \mathfrak{h}\} / \sim.$$

一方で G/H 上の不変平坦な射影構造は次の商集合と一対一に対応する。

$$\{(f, v) \mid f \otimes \Lambda_1: \mathfrak{g} \oplus \mathbf{C} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbf{C}^{n+1}) \text{ は概均質ベクトル空間, } f \otimes \Lambda_1(\mathfrak{g} \oplus \mathbf{C})v = \mathbf{C}^{n+1}, \mathfrak{g}_{\bar{v}} = \mathfrak{h}\} / \sim.$$

定理 5 における同値関係は次で定義される。 P を $GL(\mathbf{C}^{n+1})$ の元, リー環の表現と表現空間の元からなる組 $(f, v), (g, w)$ が同値であるとは, GL 構造においてはある $GL(\mathbf{C}^{n+1})$ の元 P が存在して $g = \text{Ad}(P)f, Pv = w$ が成り立つときを言う。また平坦な射影構造においては $\bar{g} = \text{Ad}(\bar{P})\bar{f}, \bar{P}\bar{v} = \bar{w}$ が成り立つときを言う。

注意 1 不変平坦な射影構造の部分幾何構造である不変平坦なアファイン構造やリーマン構造などに関しても, 同様にある概均質ベクトル空間が対応する。それは, 上記の定理において不変平坦な射影構造に対応する概均質ベクトル空間の条件に, 新たな条件を付加する形で記述される [6]。

定理から G/H 上に不変平坦な複素射影構造があれば, 1 次元高いある等質空間 \tilde{G}/\tilde{H} 上に不変な GL 構造が誘導される。ここで \tilde{G} のリー環は $\mathfrak{g} \oplus \mathbf{C}$ であり, \tilde{H} のリー環は \mathfrak{h} と同型である。また G/H 上に不変な GL 構造が与えられたとき, $\mathfrak{g}_{\bar{v}}$ に対して定まる G の連結リー部分群を \bar{H} と書くと, G/\bar{H} 上には不変平坦な射影構造の存在することが分かる。

4 存在・非存在問題への応用

本節では前節で得られた定理の応用として, 既約で不変平坦な複素射影構造を許容する複素リー群の分類について述べる。

前節で述べたように、複素等質空間上の不変平坦な複素射影構造はある概均質ベクトル空間と対応する。このとき概均質ベクトル空間の分類理論に注目する。ここでは以下で定義される裏返し変換という概念が重要である。3つ組 (\mathfrak{g}, f, V) が $(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{gl}(n), g \otimes \Lambda_1, V(m) \otimes V(n))$ という形を持つとする。ここで g^* を g の反傾表現とすると、 $(\mathfrak{g}', f', V') := (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{gl}(m-n), g^* \otimes \Lambda_1, V(m)^* \otimes V(m-n))$ という形の3つ組を (\mathfrak{g}, f, V) の裏返し変換と言う。裏返し変換は概均質ベクトル空間であることを保つことが知られている [8]。また (\mathfrak{g}, f, V) が被約であるとは、 (\mathfrak{g}, f, V) の任意の裏返し変換 (\mathfrak{g}', f', V') に対して $\dim V \leq \dim V'$ が成り立つときを言う。

概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) について表現 ρ が既約なものを既約概均質ベクトル空間と言うが、[8] により既約概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) の被約な同型類が分類されている。ここで等質空間上の平坦な射影構造が既約であることを、対応する概均質ベクトル空間が既約であることと定義する。このとき [8] の分類結果に現れる概均質ベクトル空間から、裏返し変換で得られるものを全て決定することにより次の定理が得られる。

定理 6 複素リー群 L が既約で不変平坦な複素射影構造を許容することは次の条件と同値である： L のリー環 \mathfrak{l} が $\mathfrak{l} = \mathfrak{sl}(a) \oplus \mathfrak{sl}(m_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}(m_k)$ という形を持ち ($a = 2, 3, 5, k \geq 1, m_i \geq 1$)、等式 $a^2 + m_1^2 + \cdots + m_k^2 - k - 2am_1m_2 \cdots m_k = 0$ をみたす。

注意 2 上記の定理におけるリー環の実形 $\mathfrak{sl}(a, \mathbf{R}) \oplus \mathfrak{sl}(m_1, \mathbf{R}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}(m_k, \mathbf{R})$ は不変平坦な実射影構造を許容する。

また幾何構造が既約であることに関しては、次のような意味がある：等質空間上の不変平坦なアフィン構造は、可約な概均質ベクトル空間と対応している。従って等質空間上の既約で不変平坦な複素射影構造は、不変平坦なアフィン構造を部分幾何構造としてもたない。

- [1] Y. Agaoka: Invariant flat projective structures on homogeneous spaces, *Hokkaido Math. J.* **11** (1982), 125–172.
- [2] Y. Agaoka, H. Kato: Invariants and left invariant flat projective structures on Lie groups, in preparation.
- [3] A. Elduque: Invariant projectively flat affine connections on Lie groups, *Hokkaido Math. J.* **30** (2001), 231–239.
- [4] H. Kato: Left invariant flat projective structures on Lie groups and prehomogeneous vector spaces, in preparation.
- [5] T. Kimura: Introduction to Prehomogeneous Vector Spaces, Amer. Math. Soc. (2003).
- [6] H. Kato: Prehomogeneous vector spaces and associated geometric structures on homogeneous spaces, in preparation.
- [7] A. Martin Mendez, J. F. Torres Lopera: Homogeneous spaces with invariant flat Cartan structures, *Indiana Univ. Math. J.* **56** No.3 (2007), 1233–1260.
- [8] M. Sato, T. Kimura: A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, *Nagoya Math. J.* **65** (1977), 1–155.
- [9] H. Urakawa: On invariant projectively flat affine connections, *Hokkaido Math. J.* **28** (1999), 333–356.

Damek-Ricci 空間内のホロ球面の主曲率について*

佐藤 弘康[†]

(東京電機大学 情報環境学部)

1 はじめに

Damek-Ricci 空間とは一般化 Heisenberg 群 (または H-type 群) とよばれる 2-step 冪零 Lie 群を 1 次元拡大した単連結可解 Lie 群で Hadamard 多様体である. 階数 1 非コンパクト型対称空間は負曲率 Damek-Ricci 空間と特徴付けられ [2], この他にも Damek-Ricci 空間が対称空間であるための必要十分条件がいくつか知られている (例えば, [1, Theorem 2, p.111], [3] など).

n 次元 Hadamard 多様体 M には理想境界とよばれる $(n-1)$ 次元多様体 ∂M が定まり, $\xi \in \partial M$ に対し, Busemann 関数とよばれる M 上の関数 $p \mapsto B(p, \xi)$ が定まる. この関数 $B(\cdot, \xi)$ の等位超曲面を $\xi \in \partial M$ を中心とするホロ球面とよぶ.

Damek-Ricci 空間 S を一般化 Heisenberg 群 N の 1 次元拡大とし, N の Lie 環を \mathfrak{n} とする. さらに, \mathfrak{n} の中心を \mathfrak{z} , その直交補空間を \mathfrak{v} とする. 階数 1 非コンパクト型対称空間の場合, どのホロ球面も主曲率の値が $\frac{1}{2}, 1$ でその重複度はそれぞれ $\dim \mathfrak{v}, \dim \mathfrak{z}$ である. また, このような性質を満たす Damek-Ricci 空間は対称空間に限る. では, 対称空間ではない **Damek-Ricci** 空間内のホロ球面の主曲率 (**Busemann** 関数の **Hessian** の固有値) はどのような性質をもつのであろうか.

Damek-Ricci 空間 S は構成の仕方から $S \simeq \mathfrak{v} \times \mathfrak{z} \times \mathbb{R}_+$ と同一視することができる. このとき, その理想境界 ∂S は $N (\simeq \mathfrak{n})$ に無限遠点を加えた集合 $N \cup \{\infty\}$ と同一視できる. これらの同一視のもとで, S の Busemann 関数 B の Hessian ∇dB が以下の性質を満たすことがわかった;

定理 1. $S \simeq \mathfrak{v} \times \mathfrak{z} \times \mathbb{R}_+$ を Damek-Ricci 空間とし, $p = (X, Z, a) \in S$, $\xi \in \partial S \simeq N \cup \{\infty\}$ とする. このとき,

- (1) $\infty \in \partial S$ を中心とするホロ球面の主曲率は $\frac{1}{2}, 1$ でその重複度はそれぞれ $\dim \mathfrak{v}, \dim \mathfrak{z}$ である (cf. [1, Proposition, p.88]).
- (2) $\xi = (x, z) \in N$ で, $x - X = 0$ または $z - Z - \frac{1}{2}[X, x] = 0$ のとき, $\nabla dB(p, \xi)$ の固有値は $0, \frac{1}{2}, 1$ でその重複度はそれぞれ $1, \dim \mathfrak{v}, \dim \mathfrak{z}$ である.
- (3) $\xi = (x, z) \in N$ で, $x - X \neq 0$ かつ $z - Z - \frac{1}{2}[X, x] \neq 0$ のとき, $\nabla dB(p, \xi)$ を接空間 $T_p S$

第 57 回幾何学シンポジウム (2010 年 8 月 6 日~9 日, 神戸大学) 講演予稿.

* 本講演は伊藤光弘氏 (筑波大学名誉教授) との共同研究に基づく.

[†] E-mail : hiroyasu@sie.dendai.ac.jp

の線形変換とみるとき、 $T_p S$ は以下を満たす 3 つの不変部分空間 V_i ($i = 1, 2, 3$) の直和に分解できる；

- (a) V_1 は勾配ベクトル ∇B を含む 4 次元の部分空間で、 $\nabla dB|_{V_1}$ の固有値は $0, \frac{1}{2}, 1$ 、重複度は $1, 2, 1$ である。
- (b) $\dim V_2 = (\dim \mathfrak{v} - \dim \mathfrak{z} - 1)$ で、 $\nabla dB|_{V_2} = \frac{1}{2} \text{id}$ である。
- (c) 「 $\nabla dB|_{V_3}$ の固有値が $\frac{1}{2}, 1$ で重複度が $(\dim \mathfrak{z} - 1)$ 」 $\iff S$ は階数 1 非コンパクト型対称空間のいずれか。

本講演では、定理 1 の証明のアイデアや関連する結果について報告する。

2 Hadamard 多様体, Busemann 関数, ホ口球面

(M, g) を n 次元 Hadamard 多様体 (完備, 単連結, 非正曲率 Riemann 多様体) とする。 M の 2 つの半開測地線 $\gamma_i : [0, \infty) \rightarrow M$ ($i = 1, 2$) は、任意の t に対し $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) < c$ を満たす正の数 c が存在するとき、漸近的であるという。これは M の半開測地線全体の集合に同値関係を定める。この同値関係による商空間を M の理想境界とよび、 ∂M と書く。点 $\xi \in \partial M$ はある測地線 γ の極限 $\gamma(\infty)$ と見なすことができる。

$p_0 \in M$ を固定し、 $\xi \in \partial M$ に対して定まる M 上の関数

$$M \ni p \longmapsto B(p, \xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} (d(\gamma_\xi(t), p) - t)$$

を p_0 を基点とする **Busemann 関数** とよぶ。ただし、 $\gamma_\xi(t)$ は基点 p_0 を始点とし、 ξ に収束する半開測地線である。基点をとりかえてもそれらに関する Busemann 関数は定数の差しかない。また、Busemann 関数は C^1 級凸関数で勾配ベクトル $\nabla B(\cdot, \xi)$ は至るところ $|\nabla B| = 1$ を満たす関数と特徴づけられる [5, 補題 4.12, p.301]。

Busemann 関数の等位超曲面 $H_{(p, \xi)} := \{q \in M \mid B(q, \xi) = B(p, \xi)\}$ を $p \in M$ を通り、 $\xi \in \partial M$ を中心とするホ口球面とよぶ。

3 Damek-Ricci 空間

$\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}, [\cdot, \cdot], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を 2-step 冪零 Lie 環、 \mathfrak{z} を \mathfrak{n} の中心、 \mathfrak{v} をその直交補空間とする。線形写像 $J : \mathfrak{z} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{v})$ を

$$\langle J_Z X, Y \rangle = \langle Z, [X, Y] \rangle \quad (X, Y \in \mathfrak{v}, Z \in \mathfrak{z})$$

と定義する。任意の $Z \in \mathfrak{z}$ に対し、 $J_Z \circ J_Z = -|Z|^2 \text{id}_{\mathfrak{v}}$ が成り立つとき、 \mathfrak{n} を一般化 **Heisenberg 環** (または **H-type 環**) とよび、 \mathfrak{n} を Lie 環とする単連結 Lie 群 N を一般化 **Heisenberg 群** (または **H-type 群**) とよぶ。

一般化 Heisenberg 環 $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$ の 1 次元拡大 $\mathfrak{s} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathbb{R}A$ にブラケット積と内積を

$$[X + Z + lA, X' + Z' + l'A]_{\mathfrak{s}} = \frac{l}{2} (lX' - l'X) + (lZ' - l'Z + [X, X']),$$

$$\langle X + Z + lA, X' + Z' + l'A \rangle_{\mathfrak{s}} = \langle X, X' \rangle + \langle Z, Z' \rangle + ll'$$

と定義する. $(\mathfrak{s}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{s}})$ を Lie 環とし, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{s}}$ を左不変に拡張した計量を備えた単連結 Lie 群 S を Damek-Ricci 空間とよぶ. $S \simeq \mathfrak{v} \times \mathfrak{z} \times \mathbb{R}_+$ と同一視すると S の群構造は

$$(X, Z, a) \cdot (X', Z', a') = \left(X + \sqrt{a}X', Z + aZ' + \frac{\sqrt{a}}{2}[X, X'], aa' \right).$$

で与えられる. Damek-Ricci 空間 S は Hadamard 多様体で, その理想境界は $N \cup \{\infty\}$ とみなすことができる. 負曲率 Damek-Ricci 空間は階数 1 非コンパクト型対称空間のいずれかであり, S が対称空間であるための必要十分条件は S の一般化 Heisenberg 群 N が \mathbf{J}_2 条件 (互いに直交する任意の $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}$ に対して, $J_{Z_1} \circ J_{Z_2} = J_{Z_3}$ となる $Z_3 \in \mathfrak{z}$ が存在する) を満たすことである (詳細は [1] を参照).

4 定理 1 (3) の証明のアイデア

Damek-Ricci 空間 S を $\mathfrak{v} \times \mathfrak{z} \times \mathbb{R}_+$, その理想境界 ∂S を $(\mathfrak{v} \times \mathfrak{z}) \cup \{\infty\}$ と同一視するとき, S の Busemann 関数は以下の式で表される;

補題 2 ([4]). $p = (X, Z, a) \in S$, $\xi \in \partial S$ とする. このとき, S の単位元を基点とする Busemann 関数は

$$B(p, \xi) = \begin{cases} \log \left(\frac{(a + \frac{1}{4}|x - X|^2)^2 + |z - Z - \frac{1}{2}[Z, x]|^2}{a \left((1 + \frac{1}{4}|x|^2)^2 + |z|^2 \right)} \right), & (\xi = (x, z) \in N) \\ -\log a. & (\xi = \infty) \end{cases}$$

定理 1 の証明は Busemann 関数の Hessian を具体的に計算するのだが, 次の手順で実行する;

- \mathfrak{v} , \mathfrak{z} の正規直交基底 $\{e_i\}$, $\{f_j\}$ をひとつ選ぶ.
- それらと $a_0 = (0, 0, 1) \in \mathfrak{s}$ を左不変に拡張した正規直交枠 $\{A_0, E_i, F_j\}$ を構成する.
- 正規直交枠に関する Busemann 関数の Hessian の成分を計算する.

このままでは固有値を求めるのは困難であるが, 次のように接空間を分解することで具体的な計算がある程度可能である. 2-step 冪零 Lie 環 \mathfrak{n} に対し, 中心 \mathfrak{z} の直交補空間 \mathfrak{v} は $X \in \mathfrak{v}$ を固定することにより

$$\mathfrak{v} = \ker(\text{ad}(X)) \oplus J_3 X$$

と分解できる. $x - X \neq 0$ かつ $z - Z - \frac{1}{2}[X, x] \neq 0$ のとき, e_1 を $(x - X)$ 方向, f_1 を $(z - Z - \frac{1}{2}[X, x])$ 方向にとると Lie 環 \mathfrak{s} は

$$\mathfrak{s} = \mathbb{R}a_0 \oplus \left\{ \mathbb{R}e_1 \oplus \ker(\text{ad}(e_1)|_{e_1^\perp \cap \mathfrak{v}}) \oplus \mathbb{R}J_{f_1}e_1 \oplus J_{f_1^\perp \cap \mathfrak{z}}e_1 \right\} \oplus \left\{ \mathbb{R}f_1 \oplus (f_1^\perp \cap \mathfrak{z}) \right\}.$$

と直和分解できる. ここで,

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_1 &= \mathbb{R}a_0 \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}J_{f_1}e_1 \oplus \mathbb{R}f_1, \\ \mathfrak{s}_2 &= \ker(\text{ad}(e_1)|_{e_1^\perp \cap \mathfrak{v}}), \\ \mathfrak{s}_3 &= J_{f_1^\perp \cap \mathfrak{z}}e_1 \oplus (f_1^\perp \cap \mathfrak{z})\end{aligned}$$

とおき, これらを左不変に拡張した接分布の $p \in S$ における部分空間をそれぞれ V_1, V_2, V_3 とおくと, これらは $\nabla dB(p, \xi)$ の不変部分空間となり, 定理 1 の性質を満たすことが確かめられる.

注意 3. (i) V_1 は全測地的に埋め込まれた複素双曲平面 $\mathbb{C}H^2$ を生成する [1, p.90].

(ii) Damek-Ricci 空間は漸近的調和多様体 (どのホロ球面も平均曲率一定でどれも同じ値をとる) である. 特に Einstein 多様体で, スカラー曲率は $-(\frac{1}{4} \dim \mathfrak{v} + \dim \mathfrak{z})$ に等しい [1, p.85]. また, Busemann 関数に Bochner の公式を適用することにより, $\text{Ric}(\nabla B, \nabla B) = -|\nabla dB|^2$ を得る. つまり, Damek-Ricci 空間内のホロ球面の主曲率の 2 乗和は常に $(\frac{1}{4} \dim \mathfrak{v} + \dim \mathfrak{z})$ に等しい.

参考文献

- [1] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke, Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces, Lecture Notes in Math. **1598**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [2] M.J. Druetta, *Homogeneous Riemannian manifolds and the visibility axiom*, Geom. Dedicata **17** (1985), 239-251.
- [3] M.J. Druetta, *The k-stein condition on Damek-Ricci spaces*, Proceedings of the Conference "Contemporary geometry and Related Topics", 205-215, (2006).
<http://www.emis.de/proceedings/CGRT2005/Articles/cgrt13.pdf>
- [4] M. Itoh and H. Satoh, *Information geometry of Poisson kernels on Damek-Ricci spaces*, to appear in Tokyo J. Math. **33**, No.1 (2010).
- [5] 酒井 隆, リーマン幾何学, 数学選書 11, 裳華房, 1992.

Curvature identities derived from the generalized Gauss-Bonnet formulas

Yunhee Euh¹, Jeong Hyeong Park^{2*}, and Kouei Sekigawa^{1†}

Abstract

Let $M = (M, g)$ be an n -dimensional compact oriented Riemannian manifold. The Gauss-Bonnet curvature tensor h_{2k} ($2k \leq n$) is determined by the complete contraction of the Gauss-Kronecker curvature tensor R^k of order $2k$, namely $h_{2k} = \frac{1}{(2k)!} c^{2k} R^k$ (c is the contraction map), which coincides with the intrinsic curvature invariant of M which appears in the tube formula of Weyl [7]. Here we recall that R^k is defined by the exterior product of the curvature tensor R with itself k -times in the ring of curvature structures on M (for the details, refer to [5]). The functional $\mathcal{H}_{2k}(g) = \int_M h_{2k} dv_g$ is a natural generalization of the Einstein-Hilbert functional $\mathcal{H}_2(g) = \frac{1}{2} \int_M \kappa dv_g$. Further, we see easily that, if n is even ($n = 2k$), $\mathcal{H}_{2k}(g)$ coincides the Euler number $\chi(M)$ of M (up to some constant factor), which is called the generalized Gauss-Bonnet theorem. Berger [1] discussed the generalized Gauss-Bonnet formula for 4-dimensional case from the variational theoretic view point and proved that the gradient of the functional \mathcal{H}_4 depends only on the curvature tensor and does not include its covariant derivatives. Further, he gave a negative answer to the problem raised by Singer (cf. [1], P.293). Recently, Labbi [6] extended the Berger's result to higher dimensional cases by using an index free method. In particular, since the Euler number $\chi(M)$ is a topological invariant on M (and hence, does not depend on the choice of Riemannian metrics on M), it follows from Labbi's result that the following identity holds on any $n(= 2k)$ -dimensional compact oriented Riemannian manifold M :

*Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea, e-mail: parkj@skku.edu

†Department of Mathematics, Faculty of Science, Niigata University, Niigata, 950-2181, Japan, e-mail: yunhee.euh@gmail.com(Yunhee Euh), sekigawa@math.sc.niigata-u.ac.jp (Kouei Sekigawa)

$$(*) \quad h_{2k}g - \frac{1}{(2k-1)!}c^{2k-1}R^k = 0.$$

Labbi also noted that the above equality can be obtained by a purely algebraic argument in the ring of double forms. Therefore, it follows that the curvature identity (*) holds on any even-dimensional Riemannian manifold. However, we here derive the explicit expressions for the identity in 4- and 6-dimensional cases following Berger's variational method in [1] in view of their applications. On the other hand, a computer can also help to check that the identity (*) still holds on any 4-dimensional pseudo-Riemannian manifold. From this fact, taking account of the arguments in [2], [5] and [6], the following question will naturally arise:

Question *Does the identity (*) hold for any even-dimensional pseudo-Riemannian manifolds?*

References

- [1] M. Berger, Quelques formules de variation pour une structure riemannienne, Ann. Sci. Econ. Norm. Sup. **3**(4) (1970), 285–294.
- [2] S.-S. Chern, Pseudo-Riemannian geometry and the Gauss-Bonnet formula, An. Acad. Brasil. Ci. **35** (1963), 17–26.
- [3] Y. Euh, J. H. Park, and K. Sekigawa, A curvature identity on a 4-dimensional Riemannian manifold and its applications, preprint.
- [4] Y. Euh, J. H. Park, and K. Sekigawa, Curvature identities on a 6-dimensional Riemannian manifold derived from the generalized Gauss-Bonnet formula, in preparation.
- [5] O. Kowalski, On the Gauss-Kronecker curvature tensors, Math. Ann. **203** (1973), 335–343.
- [6] M.-L. Labbi, Variational properties of the Gauss-Bonnet curvatures, Calc. Var. **32** (2008), 175–189.
- [7] H. Weyl, On the volume of tubes, Amer. J. Math. **61** (1939), 461–472.

コンパクト型 Hermite 対称空間の 二つの実形の交叉

田崎博之

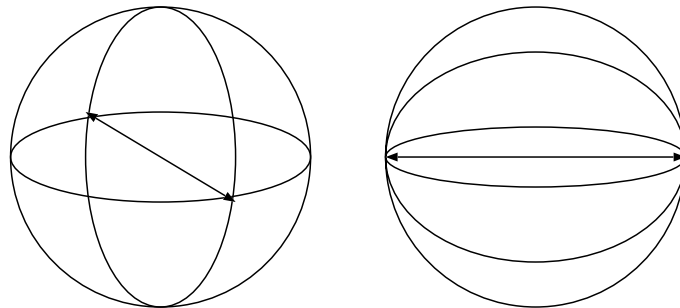
筑波大学大学院数理物質科学研究科

tasaki@math.tsukuba.ac.jp

コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形 (ある種の全測地的 Lagrange 部分多様体) の交叉が対蹠集合であることを示す。二つの実形が合同であるならば、それらの交叉は大対蹠集合になる。さらに既約コンパクト Hermite 対称空間の二つの実形の交叉を記述することもできる。本講演の内容は [14] と東京理科大の田中真紀子さんとの共同研究 [13] に基づいている。

導入

最も簡単な場合の紹介から話を始める。一次元コンパクト型 Hermite 対称空間は、複素射影直線 CP^1 であり、 CP^1 を二次元球面とみなすとその実形は大円である。 CP^1 内の異なる二つの大円は二点で交わり、交点是对蹠点の対になっている。



この現象の一般化がすべてのコンパクト型 Hermite 対称空間についても成り立つことを示すのが、この講演の目的である。さらに、既約コンパクト Hermite 対称空間内の二つの実形の交点数も記述できる。基本的な部分多様体の交叉に関する情報は、交叉積分公式を定式化するために必要なことであり、この研究を始めた動機の一つである。また、実形は Lagrange 部分多様体になっていて、交点数がわかるだけでなく、二つの Lagrange 部分多様体の交叉の形が対蹠集合になるということ自身、私にとっては興味深い現象である。

1 主結果と関連事項

\bar{M} を Hermite 対称空間とする。 \bar{M} の部分多様体 M が次の条件を満たすとき、 M を \bar{M} の**実形**と呼ぶ。ある対合的反正則等長変換 $\sigma : \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ が存在し

$$M = \{x \in \bar{M} \mid \sigma(x) = x\}$$

が成り立つ。実形 M は \bar{M} の全測地的 Lagrange 部分多様体になる。

基本的な Hermite 対称空間の実形の例を挙げておく。複素 Euclid 空間 \mathbb{C}^n 内の自然に埋め込まれた実 Euclid 空間 \mathbb{R}^n は実形である。さらに、複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 内の自然に埋め込まれた実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ も実形である。 $\mathbb{C}P^1$ 内の $\mathbb{R}P^1$ は最初に挙げた例である。

Leung[6]、竹内 [11] はコンパクト型 Hermite 対称空間の実形を分類している。たとえば、複素 Grassmann 多様体 $G_r^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n+r})$ 内の実形は、実 Grassmann 多様体 $G_r^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n+r})$ 、 $n = 2m, r = 2q$ のときの四元数 Grassmann 多様体 $G_q^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{m+q})$ 、 $n = r$ のときのユニタリ群 $U(n)$ でつくる。

Riemann 対称空間 M の点 x に関する点対称を s_x で表す。 M の部分集合 S は次の条件を満たすとき、**対蹠集合**という。 S のすべての点 x, y に対して $s_x y = y$ が成り立つ。 M の対蹠集合の元の個数の上限を **2-number** といい $\#_2 M$ で表す。 $\#_2 M$ を与える対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ。これらの概念は Chen-長野 [2] が導入した。

対蹠集合と 2-number に関する例を挙げておこう。 n 次元球面 S^n の点 $x \in S^n$ をとると、 x における点対称 s_x の不動点は x と $-x$ だけなので、 $\{x, -x\}$ は大対蹠集合になる。したがって、 $\#_2 S^n = 2$ が成り立つ。さらに、 $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のとき \mathbb{K}^{n+r} の正規直交基底 u_1, \dots, u_{n+r} をとると、

$$\{\{u_{i_1}, \dots, u_{i_r}\}_{\mathbb{K}} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n+r\}$$

は $G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r})$ の大対蹠集合になり、 $\#_2 G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r}) = \binom{n+r}{r}$ が成り立つ。対蹠集合の概念は線形代数における正規直交系の幾何学的拡張とみることができる。

竹内 [12] は、 M が対称 R 空間ならば

$$\#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2), \tag{1}$$

が成り立つことを証明した。ここで、 $H_*(M, \mathbb{Z}_2)$ は M の係数 \mathbb{Z}_2 のホモロジー群である。竹内 [11] はコンパクト型 Hermite 対称空間の実形は対称 R 空間であることも示している。したがって、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形 L の 2-number は $\dim H_*(L, \mathbb{Z}_2)$ に一致する。

定理 1.1 M をコンパクト型 Hermite 対称空間とする。 M の二つの実形 L_1, L_2 が横断的に交わるならば、 $L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の対蹠集合になる。

定理 1.2 M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、 L_1, L_2 を M の横断的に交わる合同な実形とする。このとき、 $L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の大対蹠集合になる。すなわち、 $\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$ が成り立つ。

定理 1.3 M を既約コンパクト Hermite 対称空間とし、 L_1, L_2 を M 内の横断的に交わる二つの実形とする。

- (1) $M = G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$ ($m \geq 2$) であり、 L_1 は $G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$ と合同、 L_2 は $U(2m)$ と合同ならば、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 L_1 < 2^{2m} = \#_2 L_2.$$

- (2) それ以外の場合、 $L_1 \cap L_2$ は 2-number が小さい方の実形の大対蹠集合になり、次の等式が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}.$$

注意 1.4 定理 1.2 は最初に述べた $\mathbb{C}P^1$ の二つの異なる大円の交叉は対蹠点の対になること一般化になっている。

複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の任意の実形は、自然に埋め込まれた実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ と合同になる。Howard[4] は、 $\mathbb{C}P^n$ の実形 L_1 と L_2 が横断的に交わるならば $\#(L_1 \cap L_2) = n + 1$ が成り立つことを示しているが、本質的には次の主張を示していることがわかる。 \mathbb{C}^{n+1} のユニタリ基底 u_1, \dots, u_{n+1} が存在し、 $L_1 \cap L_2 = \{\mathbb{C}u_1, \dots, \mathbb{C}u_{n+1}\}$ が成り立つ。特に、 $L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の大対蹠集合になり、さらに $\mathbb{C}P^n$ の大対蹠集合にもなっている。その元の個数は $\#_2 \mathbb{R}P^n = \#_2 \mathbb{C}P^n = n + 1$ に一致する。定理 1.2 はこの主張の一般化にもなっている。

Hermite 対称空間 M の Lagrange 部分多様体 L が次の条件を満たすとき、 L を **大域的タイト** という (Oh[8])。 L が $g \cdot L$ に横断的に交わるような M の任意の正則等長変換 g に対して

$$\#(L \cap g \cdot L) = \dim H_*(L, \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つ。注意 1.4 より、 $\mathbb{C}P^n$ の実形は大域的タイトになることがわかる。さらに、定理 1.2 と (1) より次の系が従う。

系 1.5 コンパクト型 Hermite 対称空間の任意の実形は大域的タイト Lagrange 部分多様体である。

注意 1.6 n 次元複素二次超曲面を $Q_n(\mathbb{C})$ で表す。 $Q_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}P^1 = S^2$ であり、この実形である大円が大域的タイトであることはよく知られている。 $Q_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 = S^2 \times S^2$ であり、この中の二種類の実形は大域的タイトになることを、Howard[4] の示した Poincaré の公式に基づいた積分幾何学の手法で、入江と酒井[5] は示している。最近彼らは積分幾何学の同様の手法で $Q_n(\mathbb{C})$ 内の同様の二種類の実形も大域的タイトになることを示した。系 1.5 はこれらの結果の一般化になっている。

2 証明の概要

Frankel[3] の手法を利用して次の補題を得る。

補題 2.1 ([14]) M を正の正則断面曲率を持つコンパクト Kähler 多様体とする。このとき、 M の全測地的コンパクト Lagrange 部分多様体 L_1, L_2 に対して、 $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ 。

コンパクト対称空間の極大トーラスに関する竹内 [10] の結果と最小軌跡に関する酒井 [9] の結果から、次の補題を導くことができる。

補題 2.2 A をコンパクト対称空間 M の原点 o を通る極大トーラスとする。 A から決まるルート系により基本胞体 $S \subset \mathfrak{a}$ を定める。 \bar{S} はルート系によりある胞体分割 $\bar{S} = \cup_i S_i$ を持つ。 A_1 を M の o を通るもう一つの極大トーラスとし、 $A_1 \cap A \cap \text{Exp} S_i \neq \emptyset$ ならば、 $\text{Exp} S_i \subset A_1 \cap A$ が成り立つ。

定理 1.1 の L_1, L_2 は、補題 2.1 より必ず交わり、補題 2.2 より交叉の形を特定でき、 $L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の対蹠集合になることがわかる。

M をコンパクト対称空間とし、 $p \in M$ とする。 p における点対称 s_p の不動点集合 $F(s_p, M)$ を連結成分に分解し

$$F(s_p, M) = \bigcup_{j=0}^r M_j^+$$

としたとき、各連結成分 M_j^+ を M の p に関する**極地**と呼ぶ。極地は Chen-長野の導入した概念であり、Chen-長野 [1] や長野 [7] で詳しく調べられている。 M がコンパクト型 Hermite 対称空間の場合、各極地 M_j^+ もコンパクト型 Hermite 対称空間になり、 M の実形 L に対して $L \cap M_j^+ \neq \emptyset$ ならば $L \cap M_j^+$ は M_j^+ の実形になる。さらに o を通り横断的に交わる二つの実形 L_1, L_2 に対して、定理 1.1 より $L_1 \cap L_2$ は対蹠集合になるため $L_1 \cap L_2 \subset F(s_o, M)$ が成り立つ。よって

$$L_1 \cap L_2 = \bigcup_{j=0}^r \{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\}$$

となり、 $L_1 \cap L_2$ の性質は各極地 M_j^+ の二つの実形 $L_1 \cap M_j^+$ と $L_2 \cap M_j^+$ の交叉の性質に帰着できる。これらを利用して極地による数学的帰納法によって定理 1.2 と定理 1.3 を証明できる。定理 1.3 の証明では M の極地 M_j^+ における二つの実形の交叉が既知のものでなければならぬので、証明の順序に工夫が必要になる。また、 M が既約であっても M_j^+ は既約になるとは限らない。たとえば複素 Grassmann 多様体の極地は、次元の小さい二つの複素 Grassmann 多様体の積になる。このため、既約ではない場合も考える必要がある。

参考文献

- [1] B.-Y. Chen and T. Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, *Duke Math. J.* 44 (1977), 745–755.
- [2] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, *Trans. Amer. Math. Soc.* 308 (1988), 273–297.
- [3] T. Frankel, Manifolds with positive curvature, *Pacific J. Math.* 11 (1961), 165–174.
- [4] R. Howard, The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces, *Mem. Amer. Math. Soc.*, No.509, **106**, (1993)
- [5] H. Iriyeh and T. Sakai, Tight Lagrangian surfaces in $S^2 \times S^2$, *Geom. Dedicata* 145 (2010), 1–17.
- [6] D. P. S. Leung, Reflective submanifolds. IV, Classification of real forms of Hermitian symmetric spaces, *J. Differential Geom.* 14 (1979), 179–185.
- [7] T. Nagano, The involutions of compact symmetric spaces, *Tokyo J. Math.* **11**(1988), 57–79.
- [8] Y.-G. Oh, Tight Lagrangian submanifolds in CP^n , *Math. Z.* 207 (1991), 409–416.
- [9] T. Sakai, On cut loci of compact symmetric spaces, *Hokkaido Math. J.* 6 no. 1, (1977), 136–161.
- [10] M. Takeuchi, On conjugate loci and cut loci of compact symmetric spaces I. *Tsukuba J. Math.* **2** (1978), 35 – 68.
- [11] M. Takeuchi, Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces, *Tohoku Math. J.*, (2) 36, 293–314 (1984)
- [12] M. Takeuchi, Two-number of symmetric R -spaces, *Nagoya Math. J.* 115 (1989), 43–46.
- [13] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, preprint (2010).
- [14] H. Tasaki, The intersection of two real forms in the complex hyperquadric, to appear in *Tohoku Math. J.* 62 no.3 (2010).

Generalized Finsler structures on 3-manifolds

Tokai University, S. V. Sabau

1 Introduction

A Finsler norm, or metric, on a real smooth, n -dimensional manifold M is a function $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ that is positive and smooth on $\widetilde{TM} = TM \setminus \{0\}$, has the *homogeneity property* $F(x, \lambda v) = \lambda F(x, v)$, for all $\lambda > 0$ and all $v \in T_x M$, having also the *strong convexity* property that the Hessian matrix $g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$ is positive definite at any point $u = (x^i, y^i) \in \widetilde{TM}$.
 $T_x M$.

A Finsler structure (M, F) can be regarded as well as a smooth hypersurface $\Sigma \subset TM$ for which the canonical projection $\pi : \Sigma \rightarrow M$ is a surjective submersion and having the property that for each $x \in M$, the π -fiber $\Sigma_x = \pi^{-1}(x)$ is strictly convex including the origin $O_x \in T_x M$.

A generalization of this notion is the *generalized Finsler structure* introduced by R. Bryant. In the two dimensional case a generalized Finsler structure is a coframe $\omega = \{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ on a three dimensional manifold Σ that satisfies some given structure equations (see [Br2002]).

A generalized Finsler structure defined on a 3-manifold is *amenable* if the space of leaves M of the foliation $\{\omega^1 = 0, \omega^2 = 0\}$ is a differentiable manifold such that the canonical projection $\pi : \Sigma \rightarrow M$ is a smooth submersion.

The canonical parallel transport $\Phi_t : T_x M \setminus 0 \rightarrow T_{\sigma(t)} M \setminus 0$, defined by the Chern connection (see [BCS2000] for details) along a curve σ on M , is a diffeomorphism that preserves the Finslerian length of vectors. Unlike the parallel transport on a Riemannian manifold, Φ_t is not a linear isometry in general.

This unexpected fact leads to some classes of special Finsler metrics. A Finsler metric whose parallel transport is a linear isometry is called a *Berwald metric*, and one whose parallel transport is only a Riemannian isometry is called a *Landsberg metric*.

Landsberg structures have the property that the Riemannian volume of the Finslerian unit ball is a constant. This remarkable property leads to a proof of Gauss-Bonnet theorem on surfaces [BCS2000] and other interesting results. Nevertheless a Gauss-Bonnet theorem on surfaces can be proved even in much a more general setting ([ISS2010]).

Obviously, any Berwald structure is a Landsberg one. However, there are no examples of global Landsberg structures that are not Berwald.

Generally speaking, since the examples are scarce, the problem of existence of Finsler structures with special geometrical properties is one of the main topics in modern Finsler geometry. The main tool for the study of local existence is the Cartan-Kähler theory ([IL2003]), and for the global existence, the contact circles ([GG1995]).

R. Bryant has proved in [Br2002] that there are analytical $K = 1$ generalized Finsler structures on 3-manifolds depending on two functions of two variables (in the sense of Cartan-Kähler theory). Moreover, he gave the local form of such a structure that turns out to provide a classical $K = 1$ Finsler structure on the 2-sphere.

We were interested in proving a similar result for generalized Landsberg structures on 3-manifolds in [SSS2010] and in the study of the global existence of such structures ([SSP2010]). Here are some of our findings.

2 Local issues

Recall that a *generalized Landsberg structure* is a coframe $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ on the 3-manifold Σ that verifies the structure equations

$$d\omega^1 = -I\omega^1 \wedge \omega^3 + \omega^2 \wedge \omega^3, \quad d\omega^2 = -\omega^1 \wedge \omega^3, \quad d\omega^3 = K\omega^1 \wedge \omega^2, \quad (1)$$

with Bianchi identities

$$dI = I_1\omega^1 + I_3\omega^3, \quad dK = K_1\omega^1 + K_2\omega^2 - KI\omega^3, \quad (2)$$

where I and K are smooth functions defined on Σ .

If we denote

$$\Theta^1 = d\omega^1 + I\omega^1 \wedge \omega^3 - \omega^2 \wedge \omega^3, \quad \Theta^2 = d\omega^2 + \omega^1 \wedge \omega^3, \quad \Theta^3 = d\omega^3 - K\omega^1 \wedge \omega^2 \\ \theta^1 = dI - I_1\omega^1 - I_3\omega^3, \quad \theta^2 = dK - K_1\omega^1 - K_2\omega^2 + KI\omega^3,$$

we obtain the exterior differential system with independence condition $(\tilde{\mathcal{I}}, \Omega)$, where

$$\tilde{\mathcal{I}} = \{\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, \theta^1, \theta^2\}, \quad \Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0,$$

that lives on the 18-dimensional manifold $\tilde{\Sigma} = \mathcal{F}(\Sigma) \times \mathbb{R}^6$. Here $\mathcal{F}(\Sigma)$ is the frame bundle of the 3-manifold Σ .

By means of Cartan-Kähler theorem it follows

Theorem 1. ([SSS2010])

The linear Pfaffian prolongation $(\mathcal{V}(\tilde{\mathcal{I}}, \Omega), \tilde{\mathcal{I}})$ of the exterior differential system $\tilde{\mathcal{I}}$ on $\tilde{\Sigma}$ is involutive. Moreover, the analytical integral manifolds of $\tilde{\mathcal{I}}$ depend on 3 functions of 3 variables.

Since the projection of an integral manifold of the prolongation $\tilde{\mathcal{I}}$ to $\tilde{\Sigma}$ is also an integral manifold of $\tilde{\mathcal{I}}$, it follows that there exist non-trivial generalized Landsberg structures on a 3-manifold Σ .

The next step is to find a construction method for the Landsberg structures, and a local form.

We had obtained the following prescription for constructing generalized Landsberg structures on 3-manifolds:

- Start with a smooth surface Λ with local coordinates z^1, z^2 , and consider the functions $\bar{m}, u : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ which satisfy the PDE

$$\bar{m}_{z^1 z^2} = \gamma_1 \bar{m}_{z^2} + \gamma_2 \bar{m}_{z^1}, \quad \bar{m}_{z^2 z^2} = -(\gamma_1 m_{z^1} - \gamma_2 m_{z^2}) + u^2 + \operatorname{div} \gamma, \quad (3)$$

where $\gamma = d(\log u)$, i.e. $\frac{1}{u} u_{z^i} = \gamma_i$, $i = 1, 2$. The existence of such an \bar{m} and u is guaranteed by the Cartan-Kähler theorem (see [SSS2010], Proposition 8.1).

- Denote by $g = u^2[(dz^1)^2 + (dz^2)^2]$ the corresponding Riemannian metric on Λ conformal equivalent to the flat metric;
- Construct the g -orthonormal frame bundle $\nu : \mathcal{F}(\Lambda) \rightarrow \Lambda$ with the tautological 1-forms α^1, α^2 and the Levi-Civita connection form α^3 ;
- Lift the function \bar{m} to $\Sigma := \mathcal{F}(\Lambda)$ as $\tilde{m} := \nu^*(\bar{m})$;
- Construct the coframe $\{\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2, \bar{\omega}^3\}$ on $\Sigma = \mathcal{F}(\Lambda)$ given by

$$\bar{\omega}^1 = \frac{1}{\tilde{m}}(\alpha^3 - \frac{\tilde{m}_2}{\tilde{m}}\alpha^1), \quad \bar{\omega}^2 = \frac{1}{\tilde{m}}\alpha^1, \quad \bar{\omega}^3 = \alpha^2, \quad (4)$$

where $\tilde{m} = \nu^*(\bar{m})$.

Then, we have

Theorem 2. ([SSS2010])

The coframe $\{\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2, \bar{\omega}^3\}$ constructed above is a generalized Landsberg structure on the 3-manifold $\Sigma = \mathcal{F}(\Lambda)$.

We obtain now easily the normal form of this generalized structure:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^1 &= \frac{1}{\tilde{m}} \left[dt - *d(\log u) - \frac{u}{\tilde{m}} \frac{\tilde{m}_2}{\tilde{m}} (\cos(t)dz^1 - \sin(t)dz^2) \right] \\ \bar{\omega}^2 &= \frac{u}{\tilde{m}} (\cos(t)dz^1 - \sin(t)dz^2), \quad \bar{\omega}^3 = u (\sin(t)dz^1 + \cos(t)dz^2), \end{aligned} \quad (5)$$

where $\tilde{m} = \nu^*(\bar{m})$, $\tilde{m}_2 = \nu^*(\frac{1}{u} \frac{\partial \bar{m}}{\partial z^2})$ and $t \in [0, 2\pi]$ is the fiber coordinate over $z = (z^1, z^2) \in \Lambda$. Here, we denote again the prolongation $\nu^*(u)$ of u to $\mathcal{F}(\Lambda)$ by the same letter.

3 Global issues

We would like now to study the global existence of special generalized Finsler structures such as $K = 1$, or Landsberg type. We have found that the theory of contact circles developed by G. Geiges and J. Gonzalo ([GG1995]) can be of great help. Let us recall that a 3-manifold is said to admit a *contact circle* if it admits a pair of contact forms (α^1, α^2) such that for any $(\lambda_1, \lambda_2) \in S^1$, the linear combination $\lambda_1\omega^1 + \lambda_2\omega^2$ is also a contact form. A contact circle (α^1, α^2) is called a *taut contact circle* if the contact form $\lambda_1\omega^1 + \lambda_2\omega^2$ defines the same volume form for all $(\lambda_1, \lambda_2) \in S^1$. This is equivalent with saying that the pair (α^1, α^2) satisfies

$$\alpha^1 \wedge d\alpha^1 = \alpha^2 \wedge d\alpha^2 \neq 0, \quad \alpha^1 \wedge d\alpha^2 + \alpha^2 \wedge d\alpha^1 = 0 \quad (6)$$

is called a *taut contact circle*. If they satisfy

$$\alpha^1 \wedge d\alpha^1 = \alpha^2 \wedge d\alpha^2 \neq 0, \quad \alpha^1 \wedge d\alpha^2 = \alpha^2 \wedge d\alpha^1 = 0 \quad (7)$$

then it is called a *Cartan structure*.

One can easily see that, if (Σ, ω) is a generalized Finsler structure, then (ω^1, ω^3) is a Cartan structure if and only if $K = 1$, i.e. we have a positive constant Gauss curvature generalized Finsler structure.

Recall that a *generalized Finsler structure with $K = 1$* is a coframe $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ on the 3-manifold Σ that verifies the structure equations

$$d\omega^1 = -I\omega^1 \wedge \omega^3 + \omega^2 \wedge \omega^3, \quad d\omega^2 = -\omega^1 \wedge \omega^3, \quad d\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega^2 - J\omega^1 \wedge \omega^3. \quad (8)$$

with Bianchi identities

$$dI = I_1\omega^1 + J\omega^2 + I_3\omega^3, \quad dJ = J_1\omega^1 - I\omega^2 + J_3\omega^3, \quad (9)$$

where I and J are smooth functions defined on Σ .

It follows

Theorem 3. ([SSP2010]) *Let (Σ, ω) be a generalized Finsler structure with $K = 1$. Then*

1. *the 3-manifold Σ admits a \mathcal{K} -Cartan structure $(\alpha^1 := \omega^3, \alpha^2 := \omega^1)$ with the structure function $R = 1 - I^2 - J^2 + J_1 - I_3$;*
2. *the 3-manifold Σ is diffeomorphic to a quotient of the Lie group G under a discrete subgroup Γ of G , acting by left multiplication, where G is one of the following:*
 - (a) $S^3 = SU(2)$, the universal cover of $SO(3)$,
 - (b) \widetilde{SL}_2 , the universal cover of $PSL_2(\mathbb{R})$,
 - (c) \widetilde{E}_2 , the universal cover of the Euclidean group, i.e. orientation preserving isometries of \mathbb{R}^2 .
3. *the indicatrix foliation of (Σ, ω) coincides with the foliation $\{\alpha^2 = 0, \alpha^3 + \varphi = 0\}$, where φ is a one form on Σ that satisfies $d\varphi = (1 - R)\alpha^1 \wedge \alpha^2$.*
In the case (Σ, ω) is a classical Finsler structure this foliation is amenable.

Let us recall ([GG1995]) that the Lie group structure of G gives an invariant coframe $\{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\}$ on G s.t.

$$d\alpha^1 = \alpha^2 \wedge \alpha^3, \quad d\alpha^2 = \alpha^3 \wedge \alpha^1, \quad d\alpha^3 = \varepsilon\alpha^1 \wedge \alpha^2,$$

where $\{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\}$ is the dual coframe of $\{e_1, e_2, e_3\}$, and $\varepsilon = 1$ for $SU(2)$, $\varepsilon = -1$ for \widetilde{SL}_2 , and $\varepsilon = 0$ for \widetilde{E}_2 . These are 1, 0, (-1) -Cartan structures on $SU(2)$, \widetilde{E}_2 and \widetilde{SL}_2 , respectively.

If a discrete subgroup Γ is given, then $\{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\}$ descends to any left quotients. These structures are called **the standard Cartan structures on G/Γ** .

Using these we get

Theorem 4. ([SSP2010])

Let (Σ, ω) be a generalized Finsler structure with $K = 1$. Then

1. *If $G = \widetilde{SL}_2$ or \widetilde{E}_2 , then there exists a discrete subgroup Γ and a diffeomorphism $\Phi : G/\Gamma \rightarrow \Sigma$ such that $(\alpha^1, \alpha^2) := \Phi^*(\omega^3, \omega^1)$ is a Cartan structure on G/Γ homothetic to the standard Cartan structure $(\tilde{\alpha}^1, \tilde{\alpha}^2)$.*
2. *If $G = SU(2)$, then the same conclusion is true provided Γ is non-abelian.*

Conversely, starting from a left quotient, we can show:

Theorem 5. ([SSP2010])

If Σ is a left quotient G/Γ (Γ non-abelian for $G = SU(2)$), and (α^1, α^2) the standard Cartan structure on G/Γ . For any invariant one form $\varphi := \varphi_1\alpha^1 + \varphi_2\alpha^2$ on Σ , let us denote by v the solution of $d\varphi = (\frac{1}{v} - R)\alpha^1 \wedge \alpha^2$.

Then, the coframe $\{\omega^1 = v\alpha^2, \omega^2 = \alpha^3 + \varphi, \omega^3 = v\alpha^1\}$ is a global defined generalized Finsler structure with $K = 1$ on G/Γ .

Let (Λ, g) be a Riemannian surface, and Σ its orthonormal frame bundle. The tautological 1-forms $\{\theta^1, \theta^2\} \in ST\Lambda$ give a Cartan structure on Σ called **the Liouville-Cartan structure** of (Λ, g) , where $ST\Lambda$ is the unit cotangent bundle ([GG1995]).

In the Finslerian setting, we obtain

Theorem 6. ([SSP2010]) *Let (Λ_0, g) be a Riemannian surface of genus g , let $\mathcal{F} = \text{Isom}_0(\Lambda_0)$ be the orientation preserving isometry group, and let Σ be the covering space of $ST\Lambda_0/d\mathcal{F}$ which is diffeomorphic to G/Γ , where G is $SU(2)$, \widetilde{E}_2 and \widetilde{SL}_2 , for $g = 0$, $g = 1$ and $g > 1$, respectively.*

Then, the Liouville-Cartan structure of $ST\Lambda_0$ induces a generalized Finsler structure with $K = 1$ on Σ for an appropriate (Λ_0, g) and \mathcal{F} .

Similar arguments give

Theorem 7. *Let (Σ, ω) be a generalized Landsberg structure s.t. $K > 0$, $K_1 = 0$.*

Then,

1. *the pair $(\alpha^1 := \sqrt{K}\omega^2, \alpha^2 := \omega^3)$ is a Cartan structure on Σ ;*
2. *the 3-manifold Σ is diffeomorphic with a left quotient G/Γ .*

References

- [BCS2000] Bao, D., Chern, S.S., Shen, Z., *An Introduction to Riemann Finsler Geometry*, Springer, GTM 200, 2000.
- [Br2002] Bryant, R., *Some remarks on Finsler manifolds with constant flag curvature*, Houston Journal of Mathematics, **vol. 28, no. 2** (2002), 221–262.
- [GG1995] Geiges, H., Gonzalo, J., *Contact Geometry and Complex Surfaces*, Invent. Math., **121**(1995), 147–209.
- [ISS2010] Itoh, J., Sabau, V., S., Shimada, H., *A Gauss-Bonnet Type Formula on Riemann-Finsler surfaces with non-constant indicatrix volume*, Kyoto Jour. of Math., **Vol. 50 (1)**(2010), 165–192.
- [IL2003] Ivey, Th. A., Landsberg, J. M., *Cartan for Beginners; Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential systems*, AMS, GSM 61, 2003.
- [SSS2010] Sabau, V., S., Shibuya, K., Shimada, H., *On the existence of Generalized Unicorns on Surfaces*, Diff. Geom. and Its Appl., **Vol. 28** (2010), 406–435.
- [SSP2010] Sabau, V., S., Shimada, H., Pitis, Gh., *Generalized Finsler structures and contact circles on 3-manifolds*, to appear, 2010.

sorin@tspirit.tokai-u.jp

Handle attaching in wrapped Floer homology and brake orbits in classical Hamiltonian systems

入江慶*

京都大学大学院理学研究科

概要

古典ハミルトン系において、一定の条件を満たすエネルギー超曲面の上には brake orbit が存在するという結果 (Bolotin による) の別証明を, wrapped Floer homology という不変量の計算を通して与える.

1 古典ハミルトン系

シンプレクティック多様体とその上の関数 (ハミルトニアンとよぶ) の組をハミルトン系という (多様体も関数も C^∞ 級とする). シンプレクティック多様体を (M, ω) , ハミルトニアンを H とするとき, $i_{X_H}\omega = -dH$ により定まる M 上のベクトル場 X_H を H をハミルトニアンとするハミルトンベクトル場という. $dH(X_H) = 0$ より X_H の積分曲線は H の値が一定のところを動くので, 与えられた $a \in \mathbb{R}$ に対して $H^{-1}(a)$ の上に X_H の周期軌道が存在するかどうかを問うことが意味をもつ. ここでは, この問題を古典ハミルトン系において考察する.

はじめに古典ハミルトン系の定義を説明する. N をリーマン多様体, $V \in C^\infty(N)$ とする. このとき, T^*N には自然なシンプレクティック形式 $\omega_N := \sum_{1 \leq i \leq n} dp_i \wedge dq_i$ が入る. ここで (q_1, \dots, q_n) は N 上の局所座標であり, p_i は各ファイバー上の dq_i 成分を表す. そこで, $H_V \in C^\infty(T^*N)$ を $H_V(q, p) = V(q) + |p|^2/2$ で定めると, (T^*N, ω_N) と H_V の組はハミルトン系になる. これを古典ハミルトン系という. $x = (q, p)$ とおいて方程式 $\dot{x} = X_{H_V}(x)$ を書き直すと, V をポテンシャルとする N 上の運動方程式

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\nabla V(q)$$

が得られる. 古典ハミルトン系においては, 前述の問題に対して次の解答が与えられている:

定理 1.1 (Bolotin [1]). N をリーマン多様体, $V \in C^\infty(N)$ とする. a を H_V の正則値とし, $H_V^{-1}(a)$ がコンパクトとすると $H_V^{-1}(a)$ の上には X_{H_V} の周期軌道が存在する.

$H_V^{-1}(a) \cap N = \emptyset$ のときは, N のリーマン計量をうまくとりかえることで, 「閉リーマン多様体上には閉測地線の存在する」というよく知られた事実から, $H_V^{-1}(a)$ 上に X_{H_V} の周期軌道が存在することが分かる (Maupertuis-Jacobi の原理). そこで $H_V^{-1}(a) \cap N \neq \emptyset$ の場合が問題となる. このときは次が成り立つ.

定理 1.2 ([1]). N, V, a を定理 1.1 のとおりとする. $H_V^{-1}(a) \cap N \neq \emptyset$ が成り立つとき, $l > 0$ および $x : [0, l] \rightarrow H_V^{-1}(a)$ で $\dot{x} = X_{H_V}(x)$ かつ $x(0), x(l) \in N$ を満たすものが存在する.

* iriek@math.kyoto-u.ac.jp

定理 1.2 の条件を満たす x を brake orbit という. Brake orbit $x : [0, l] \rightarrow T^*N$ があると, $I : T^*N \rightarrow T^*N; (q, p) \mapsto (q, -p)$ を用いて $y : [0, 2l] \rightarrow T^*N$ を

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & (0 \leq t \leq l) \\ I(x(2l-t)) & (l \leq t \leq 2l) \end{cases}$$

で定めると, X_{H_V} の周期軌道になる. ゆえに $H_V^{-1}(a) \cap N \neq \emptyset$ の場合も定理 1.1 が成り立つ.

今回の講演では, Wrapped Floer homology という不変量の計算に関する結果を紹介し, その系として上の定理 1.2 が導けることを説明したい.

2 Wrapped Floer homology

2.1 Liouville triple

この講演では, wrapped Floer homology は, 3 つ組 (M, λ, L) であって次を満たすものに対して定義する :^{*1}

- (1) (M, ω) は境界を持つ $2n$ 次元コンパクト多様体.
- (2) L は M の n 次元コンパクト多様体で, ∂M と横断的に交わっており, $\partial L = L \cap \partial M$.
- (3) λ は M 上の 1-形式で, 次を満たす.
 - (a) $(M, d\lambda)$ はシンプレクティック多様体.
 - (b) $\lambda|_L = 0$.
 - (c) $(\partial M, \lambda)$ は接触多様体であり, M の向きから誘導される ∂M の向きについて $\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1} > 0$.

このような 3 つ組を仮に Liouville triple と呼ぶことにする. 条件 (3)-(b) より L は $(M, d\lambda)$ のラグランジュ部分多様体であることに注意されたい.

2.2 Liouville triple の完備化

Liouville triple に対する完備化という操作を説明する. (M, λ, L) を Liouville triple とする. このとき $i : \partial M \rightarrow \partial M \times \{0\}; z \mapsto (z, 0)$ とおいて

$$\begin{aligned} \hat{M} &:= M \cup_i \partial M \times [0, \infty) \\ \hat{L} &:= L \cup_i \partial L \times [0, \infty) \end{aligned}$$

とおく. さらに, $\lambda \in \Omega^1(M)$ を $\hat{\lambda} \in \Omega^1(\hat{M})$ に

$$\hat{\lambda} := \begin{cases} \lambda & (\text{on } M) \\ e^r(\lambda|_{\partial M}) & (\text{on } \partial M \times [0, \infty)) \end{cases}$$

で広げる (ただし r は $[0, \infty)$ 成分を表す). そこで $(\hat{M}, \hat{\lambda}, \hat{L})$ を (M, λ, L) の完備化という. このとき $(\hat{M}, d\hat{\lambda})$ はシンプレクティック多様体であり, $\hat{\lambda}|_{\hat{L}} = 0$ である. 特に \hat{L} は \hat{M} のラグランジュ部分多様体である.

2.3 \hat{M} 上のハミルトニアン

Liouville triple (M, λ, L) に対する wrapped Floer homology $\text{WFH}_*(M, \lambda, L)$ の定義は次の二段階に分かれる.

^{*1} (3) は強すぎる条件であるが, 今の目的にはこれで十分である.

- (1) 「よい性質」を持つ $H \in C^\infty(\hat{M})$ に対して, $\text{WFH}_*(H)$ を定義する.
- (2) $\text{WFH}_*(H)$ を H について極限をとることで $\text{WFH}_*(M, \lambda, L)$ を定義する.

ここではまず, 上の (1) でのべた「よい性質」とは何か説明したい. $H \in C^\infty(\hat{M})$ に対して,

$$\mathcal{C}(H) := \{x : [0, 1] \rightarrow \hat{M} \mid x(0), x(1) \in \hat{L}, \dot{x} = X_H(x)\}$$

とおく. X_H の生成するフローを $(\varphi^t)_t$ とおき, $x \in \mathcal{C}(H)$ に対して, $d\varphi^1 : T_{x(0)}\hat{M} \rightarrow T_{x(1)}\hat{M}$ が $d\varphi^1(T_{x(0)}\hat{L}) \cap T_{x(1)}\hat{L} = 0$ を満たすとき, x は非退化であるという.

さて, $H \in C^\infty(\hat{M})$ に対する「よい性質」として, 次の三つを考える:

- (1) ある $r_0 > 0, a > 0, b \in \mathbb{R}$ が存在して, $\partial M \times [r_0, \infty)$ において $H(z, r) = ae^r + b$ と書ける.
- (2) $\mathcal{C}(H)$ は有限集合.
- (3) 任意の $x \in \mathcal{C}(H)$ は非退化.

これらを満たす $H \in C^\infty(\hat{M})$ 全体の集合を $\mathcal{H}(\hat{M})$ と書くことにする. また, a, b は H から決まるので a_H, b_H と書く.

2.4 Wrapped Floer homology

$H \in \mathcal{H}(\hat{M})$ に対する wrapped Floer homology $\text{WFH}_*(H)$ の定義を説明する. まず, 一般に $H \in C^\infty(\hat{M})$ に対して, $\mathcal{C}(H)$ の非退化な元には指数が定義できる. 指数は常に \mathbb{Z} 値で定義できるとは限らないが, たとえば $\pi_1(M, L) = \pi_2(M, L) = 0$ ならば \mathbb{Z} 値で定義でき, 3 節で計算する場合にはこの条件を満たしている.

k を整数とする. $\mathcal{C}(H)$ の指数 k の元で生成される自由 \mathbb{Z}_2 加群を $\text{WFC}_k(H)$ と書く. 微分 $\text{WFC}_k(H) \rightarrow \text{WFC}_{k-1}(H)$ を定義するために, \hat{M} 上の概複素構造の族 $J = (J_t)_{0 \leq t \leq 1}$ をとる.*2

$x, y \in \mathcal{C}(H)$ に対して, $u : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \hat{M}$ であって方程式

$$\begin{aligned} \partial_s u - J_t(\partial_t u - X_H \circ u) &= 0, \\ u(\mathbb{R} \times \{0, 1\}) &\subset \hat{L}, \\ u(s) &\rightarrow x \ (s \rightarrow -\infty), \quad u(s) \rightarrow y \ (s \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

を満たすもの全体の集合を $\hat{\mathcal{M}}_{H,J}(x, y)$ と書く. ただし三つ目の式で $u(s)$ は写像 $[0, 1] \rightarrow \hat{M}; t \mapsto u(s, t)$ を表しており, 収束は C^∞ 収束とする. 上の方程式は s について対称性を持つので, $\hat{\mathcal{M}}(x, y)$ には自然な \mathbb{R} 作用

$$\sigma \cdot u(s, t) = u(s - \sigma, t) \quad (\sigma \in \mathbb{R})$$

が定まる. この \mathbb{R} 作用による $\hat{\mathcal{M}}(x, y)$ の商を $\mathcal{M}(x, y)$ とおく. J を generic にとると, $\mathcal{M}(x, y)$ は $\text{ind } x - \text{ind } y - 1$ 次元多様体の構造を持つ. さらに, $\text{ind } x - \text{ind } y = 1$ のときは, $\mathcal{M}(x, y)$ は有限点集合となる. そこで, 微分 $\partial_{H,J} : \text{WFC}_k(H) \rightarrow \text{WFC}_{k-1}(H)$ を

$$\partial_{H,J}[x] = \sum_{y \in \mathcal{C}_{k-1}(H)} \#\mathcal{M}_{H,J}(x, y) \cdot [y] \quad (x \in \mathcal{C}_k(H))$$

で定めると $\partial_{H,J}^2 = 0$ が成り立ち, さらに複体 $(\text{WFC}_*(H), \partial_{H,J})$ のホモトピー型は J によらないことが証明できる. そこで, そのホモロジー群を $\text{WFH}_*(H)$ と書き, H の wrapped Floer homology という.

次に, 各 H に対する $\text{WFH}_*(H)$ の極限をとって $\text{WFH}_*(M, \lambda, L)$ を定義する. $H, H' \in \mathcal{H}(\hat{M})$ が $a_H \leq a_{H'}$ を満たすとき, 適切な PDE の解の個数を数えることで準同型 $\varphi_{HH'} : \text{WFH}_*(H) \rightarrow \text{WFH}_*(H')$ を定義することができる. また, $a_H \leq a_{H'} \leq a_{H''}$ のとき

$$\varphi_{HH''} = \varphi_{H'H''} \circ \varphi_{HH'}$$

*2 $J = (J_t)_{0 \leq t \leq 1}$ はいくつかの条件を満たす必要があるが, それについては省略する.

が成り立つ。そこで $\mathcal{H}(\hat{M})$ における関係 \leq を $H \leq H' \iff a_H \leq a_{H'}$ で定め、擬順序集合 $(\mathcal{H}(\hat{M}), \leq)$ の上で帰納極限をとって

$$\mathrm{WFH}_*(M, \lambda, L) := \varinjlim_{H \in \mathcal{H}(\hat{M})} \mathrm{WFH}_*(H)$$

とする。 $\mathrm{WFH}_*(M, \lambda, L)$ を Liouville triple (M, λ, L) の wrapped Floer homology という。 Wrapped Floer homology は次のような変形不変性を持つ：

命題 2.1. $(M, \lambda^s, L)_{0 \leq s \leq 1}$ を Liouville triple の滑らかな族とすると、 $\mathrm{WFH}_*(M, \lambda^0, L) \cong \mathrm{WFH}_*(M, \lambda^1, L)$ 。

この命題から、ただちに次を得る：

系 2.2. Liouville triple (M, λ, L) と (M, λ', L) について $d\lambda = d\lambda'$ ならば $\mathrm{WFH}_*(M, \lambda, L) \cong \mathrm{WFH}_*(M, \lambda', L)$ 。

証明. $(M, s\lambda + (1-s)\lambda', L)_{0 \leq s \leq 1}$ が命題 2.1 の条件を満たす。 □

系 2.2 より、 $\mathrm{WFH}_*(M, \lambda, L)$ は $d\lambda$ だけで決まることが分かる。そこで、以降しばしば $\mathrm{WFH}_*(M, \lambda, L)$ を $\mathrm{WFH}_*(M, d\lambda, L)$ と書くことにする。

3 主結果

[3] の主結果を説明したい。本節を通じて N をリーマン多様体、 $V \in C^\infty(N)$ とし、 a は H_V の正則値で $H_V^{-1}(a)$ はコンパクトかつ $H_V^{-1}(a) \cap N \neq \emptyset$ とする。次の補題は初等的な議論で示することができる。

補題 3.1. $D_a := H_V^{-1}((-\infty, a])$ とおく。このとき、 D_a 上の 1-形式 μ であって $d\mu = \omega_N$ かつ $(D_a, \mu, D_a \cap N)$ が Liouville triple となるものが存在する。

次が [3] の主結果である。

定理 3.2. μ が補題 3.1 の条件を満たすならば、 $\mathrm{WFH}_*(D_a, \mu, D_a \cap N) = 0$ 。

$d\mu = \omega_N$ より、定理 3.2 は $\mathrm{WFH}_*(D_a, \omega_N, D_a \cap N) = 0$ と書けることに注意されたい。

定理 3.2 から定理 1.2 が導けることを説明したい。 μ が補題 3.1 の条件を満たすとし、 R を $(\partial D_a, \mu)$ 上のレーブベクトル場、すなわち $i_R(d\mu) = 0, \mu(R) = 1$ を満たすものとする。 $d\mu = \omega_N|_{\partial D_a}$ であるので、 ∂D_a 上の分布 $\mathbb{R}R$ と $\mathbb{R}X_{H_V}$ は一致する。したがって定理 1.2 を示すためには、 R の積分曲線 $x : [0, l] \rightarrow \partial D_a$ で $l > 0$ かつ $x(0), x(l) \in N$ を満たすものの存在を示せばよい。これは、次の補題から従う：

補題 3.3. (M, λ, L) を Liouville triple とし、 R を $(\partial M, \lambda)$ 上のレーブベクトル場とする。 R の積分曲線 $x : [0, l] \rightarrow \partial M$ で $l > 0$ かつ $x(0), x(l) \in L$ を満たすものが存在しないなら、 $\mathrm{WFH}_*(M, \lambda, L) \cong H_*(L, \partial L)$ 。

補題 3.3 は L 上の有限次元モース理論への帰着により証明されるが、詳細は省略する。さて、 $H_*(L, \partial L) \neq 0$ であるので、 $\mathrm{WFH}_*(M, \lambda, L) = 0$ ならば R の積分曲線 $x : [0, l] \rightarrow \partial M$ で $l > 0$ かつ $x(0), x(l) \in L$ を満たすものが存在することが分かる。これを $(M, \lambda, L) = (D_a, \mu, D_a \cap N)$ に対して適用すればよい。

最後に、定理 3.2 の証明の方針を説明する：

- (1) まず、 $\mathrm{WFH}_*(D_a, \omega_N, D_a \cap N)$ は $D_a \cap N$ の微分同相類のみにより決まることを示す。これは wrapped Floer homology の変形不変性 (命題 2.1) から容易に従う。ここで $\partial(D_a \cap N) = H_V^{-1}(a) \cap N \neq \emptyset$ であるので、 $D_a \cap N$ は空でない境界を持つコンパクト多様体である。
- (2) 次に、 $D_a \cap N$ が円板 $D^{\dim N}$ と微分同相な場合に定理が正しいことを示す。これは、定義に戻って具体的に計算することで確かめられる。

- (3) 最後に, $D_a \cap N$ のトポロジーを k -ハンドル ($1 \leq k \leq \dim N - 1$) の付加により変えても $\text{WFH}_*(D_a, \omega_N, D_a \cap N)$ が変わらないことを示す. 境界が空でない n 次元コンパクト多様体は, 円板 D^n の有限直和に対して k -ハンドル ($1 \leq k \leq n - 1$) の付加を繰り返すことで得られるので, (2) とあわせて $D_a \cap N$ が一般の場合にも定理が正しいことが分かる.

Symplectic homology という不変量に対して, (3) と類似した (より一般的な) 結果が K.Cieliebak により [2] で示されており, (3) はその結果の wrapped Floer homology 版といえる.

参考文献

- [1] Bolotin, V, *Libration motions of natural dynamical systems*, Moscow University Bulletin, 3, 1978.
- [2] Cieliebak, K, *Handle attaching in symplectic homology and the Chord Conjecture*, J.Eur.Math.Soc, 4, 115–142, 2002.
- [3] Irie, K, *Handle attaching in wrapped Floer homology and brake orbits in classical Hamiltonian systems*, in preparation.

自由剛体の固有ベクトル写像と Kummer 曲面

多羅間 大輔*

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻

1 序

本稿は、成木勇夫先生（立命館大学）との共同研究 [6] の紹介である。

自由剛体の力学系とは、微分幾何学的にいえば 3 次元回転群上の左不変 Riemann 計量に関する測地線の力学系のことであるが、完全積分可能な Hamilton 力学系の典型的な例である。自由剛体の運動は、幾何学的力学系理論の標準的手法である Hamilton 力学系の簡約の操作を通して、角運動量に関する Euler 方程式で記述されることがわかる。この Euler 方程式の積分曲線は、2 つの第一積分の 3 次元 Euclid 空間に作る等位 2 次曲面の共通部分として得られる（実）楕円曲線に一致する。さらに、可積分系の理論では、Euler 方程式に同値なパラメタ付き Lax 方程式（Manakov 方程式）を考察することは自然である。Lax 方程式の固有値を保つ性質によって、Manakov 方程式に付随して、スペクトル曲線（この代数曲線も楕円曲線である）や固有ベクトル写像（固有ベクトル直線束）が定義される。ここでは、この自由剛体の固有ベクトル写像に関して、複素代数幾何学的に考察したい。

固有ベクトル写像（固有ベクトル直線束）の複素代数幾何学的解釈についていえば、P. A. Griffiths が、[3] でより一般の Lax 方程式について、固有ベクトルをスペクトル曲線から射影空間への、積分曲線の点でパラメタ付けられた正則写像の族と理解し、Lax 方程式の流れの線形化についてコホモロジー論的解釈を与えている。自由剛体の Manakov 方程式も Griffiths の理論が適用できる一例となっている。（[3, 1] を参照。）しかし、ここでは 3 次元自由剛体の Manakov 方程式の場合に絞って、固有ベクトル写像についてより深い数学的構造を調べることを目標とする。

実は、積分曲線を複素化して考えることによって、3 次元自由剛体の固有ベクトル写像は、積分曲線とスペクトル曲線からなる直積型 Abel 曲面から複素射影平面への有理型写像とみなすことができる。本研究では、この有理型写像の性質について、複素代数曲面論の観点から考察した。基本的な主結果として、この有理型写像からある Kummer 曲面が得られ、それによって有理型写像の分解が与えられることが分かる。さらに、ここで得られる Kummer 曲面には、積分曲線およびスペクトル曲線から複素射影平面への正則写像の族に対応するいくつかの楕円ファイバー空間の構造があることがわかっており、複素射影平面のある円錐曲線のペンシルや、3 次曲線の族と Cremona 変換によってそれらの間の関係が記述できることがわかっている。これらの事柄について、お話をさせていただきます。

* JSPS Research Fellow, E-mail: dsktrm@amp.i.kyoto-u.ac.jp

2 Euler 方程式と Manakov 方程式

序でも述べたが、3次元自由剛体の力学系とは3次元回転群 $SO(3)$ の左不変 Riemann 計量に関する測地線の力学系で、余接束 $T^*SO(3)$ 上の Hamilton 力学系であるが、Hamilton 力学系の簡約 (シンプレクティック簡約, あるいは Euler-Poincaré 簡約) の手法を用いることで、角運動量ベクトル $p \in \mathbb{R}^3$ に関する Euler 方程式

$$\frac{dp}{dt} = p \times (A^{-1}p)$$

によって記述されるとしてよい。ただし、 \times は \mathbb{R}^3 の通常の外積を表し、剛体のかたちをあらわす慣性テンソル A は正値 3×3 対称行列である。この力学系は、ふたつの第一積分 $H(p) = \frac{1}{2}p^T A^{-1}p$, $L(p) = \frac{1}{2}p^T p$ をもつ。Euler 方程式の積分曲線は、 H , L の等位2次曲面の共通部分として得られる楕円曲線 C に一致する。

Euler 方程式は Lie 環の同型 $R : (\mathbb{R}^3, \times) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ によって、

$$\frac{d\Pi}{dt} = [\Pi, \Omega]$$

と書き換えられる。ここで、 $\Pi := R(p)$ と $\Omega := R(A^{-1}p)$ とは、 A から定まる 3×3 対称行列 J による線形な関係式 $\Pi = J\Omega + \Omega J$ を満たす。(適当な座標系を選んで $A = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ とすれば、 $J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3) = \text{diag}(I_2 + I_3, I_3 + I_1, I_1 + I_2)$ となる。) すると、Euler 方程式が次のパラメタ付き Lax 方程式 (Manakov 方程式) と同値であることは簡単に確かめられる：

$$\frac{d}{dt} (\Pi + \lambda J^2) = [\Pi + \lambda J^2, \Omega + \lambda J].$$

ただし、 $\lambda \in \mathbb{C}$ がパラメタである。Lax 方程式の性質により、 3×3 行列 $\Pi + \lambda J^2$ の固有値は積分曲線に沿って不変である。これによって、固有方程式 $\det(\Pi + \lambda J^2 - \mu E) = 0$ がアファイン平面 $\mathbb{C}^2 : (\lambda, \mu)$ に定めるアファイン曲線あるいはその完備化 $C' \subset P_2(\mathbb{C})$ を考えることとなるが、これをスペクトル曲線という。スペクトル曲線も楕円曲線である。実は、2つの楕円曲線 C と C' とは A を固定するごとに同種な楕円曲線である。([1, 5] を参照のこと。)

一方、行列 $\Pi + \lambda J^2$ の固有値 μ に属す固有ベクトル $v = (\alpha, \beta, \gamma)^T \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ について考えてみる。当然ながら、次の線形方程式が満たされる：

$$(\Pi + \lambda J^2 - \mu E)v = \begin{pmatrix} J_1^2 \lambda - \mu & -p_3 & p_2 \\ p_3 & J_2^2 \lambda - \mu & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & J_3^2 \lambda - \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0. \quad (1)$$

(1) について、一般の固有値は縮重がなく単純であることに注意しておきたい。したがって、一般の固有ベクトル v は定数倍の不定性を除いて (1) によって一意的に決定される。次節では、この固有ベクトルの複素代数幾何学的側面について考察し、本稿での問題設定を明確にし、主要な結果に関しても述べる。

3 固有ベクトル写像の代数幾何学

前節の最後に述べように、固有ベクトル v は一般に定数倍の不定性があるが、 $P_2(\mathbb{C})$ の点とみなすことができる。線形方程式 (1) は、積分曲線 C 上の点 (p_1, p_2, p_3) およびスペクトル曲線 C' 上の点 (λ, μ) に対して、点 $(\alpha : \beta : \gamma) \in P_2(\mathbb{C})$ を対応づける対応を定めていると考えることができる。すると、この固有ベクトル v について次のような捉え方がある：

1. 積分曲線 C とスペクトル曲線 C' の直積から複素射影平面 $P_2(\mathbb{C})$ への（有理型）写像
2. 積分曲線 C 上の点でパラメタ付けられたスペクトル曲線 C' から $P_2(\mathbb{C})$ への正則写像の族
3. スペクトル曲線 C' 上の点でパラメタ付けられた積分曲線 C から $P_2(\mathbb{C})$ への正則写像の族

序で触れた Griffiths の捉え方は 2 のそれである。しかし、幾何学的には 1 の捉え方が一番素朴であり、2 や 3 の捉え方を包摂している。したがって、1 の捉え方にしたがって考察し、後に 2 や 3 の観点でも見直してみたい。

そこで、(1) を 2 つの楕円曲線の直積 $C \times C'$ から $P_2(\mathbb{C})$ への有理型写像

$$f : C \times C' \dashrightarrow P_2(\mathbb{C})$$

とみなしてその性質を考察する。ただし、簡単のため積分曲線 C も複素化して、 $P_3(\mathbb{C})$ 内の 2 つの 2 次曲面の完全交叉と考えることとする。

次が、基本的な結果である。証明の概略は次節で述べる。

定理 1. 固有ベクトル写像 $f : C \times C' \dashrightarrow P_2(\mathbb{C})$ に対して、Kummer 曲面 S がとれて次の分解が与えられる。

$$\begin{array}{ccc} C \times C' & \dashrightarrow & P_2(\mathbb{C}) \\ & \searrow & \nearrow \\ & S & \end{array}$$

正則写像 $S \rightarrow P_2(\mathbb{C})$ は $P_2(\mathbb{C})$ のある 2 次曲線と 4 次曲線の和として得られる 6 次曲線を分岐因子とする 2 重被覆であり、有理型写像 $C \times C' \dashrightarrow S$ は直積型 Abel 曲面 $C \times C'$ の対合による商曲面の非特異化（Kummer 曲面の標準的な定義になっている）で得られる。

次節でみるように、上で掲げた固有ベクトル写像の捉え方 2 および 3 は、それぞれここで得られる Kummer 曲面 S に楕円ファイバー空間の構造を定めることがわかる。

4 Kummer 曲面 S と射影平面の幾何学

前節の固有ベクトル写像 $f : C \times C' \dashrightarrow P_2(\mathbb{C})$ について考察する。少し長い計算を行うと、この有理型写像 f は $P_2(\mathbb{C})$ の 2 重-2 重被覆で与えられることがわかる。 $(\alpha : \beta : \gamma)$ を適当に射影変換して得られる $P_2(\mathbb{C})$ の斉次座標 $(A : B : C)$ を用いると、その分岐因子は次のようにあらわされる：

- (i) 2重被覆 d_1 : 2次曲線 $C_0: y_1A^2 + y_2B^2 + y_3C^2 = 0$ および 4次曲線 $Q: y_1B^2C^2 + y_2C^2A^2 + y_3A^2B^2 = 0$ の和として得られる 6次曲線が分岐因子.
- (ii) 2重被覆 d_2 : 2次曲線 $C_0: y_1A^2 + y_2B^2 + y_3C^2 = 0$, $C_1: B^2 = C^2$, $C_2: C^2 = A^2$, $C_3: A^2 = B^2$ の和として得られる 8次曲線が分岐因子.

ただし, y_1, y_2, y_3 は, 慣性テンソル A の固有値 (慣性主軸) と初期値にのみよる係数で $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ を満たす.

ここに現れる 2次曲線 C_0, C_1, C_2, C_3 および 4次曲線 Q に関して, その配置を調べると次のようになることがわかる. すなわち, 2次曲線 C_0, C_1, C_2, C_3 はすべて 4点 $(A : B : C) = (1 : \pm 1 : \pm 1)$ を通る円錐曲線のペンシルに属し, C_1, C_2, C_3 はその特異円錐曲線 (それぞれ 2直線の和) である. $P_2(\mathbb{C})$ 上の一般の位置にある 4点を通る円錐曲線はただひとつのペンシルをなすことに注意されたい. また, 各特異円錐曲線 C_1, C_2, C_3 の 2直線の交点はそれぞれ $(A : B : C) = (1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ である. 一方, 4次曲線 Q については, これは 4点 $(A : B : C) = (1 : \pm 1 : \pm 1)$ を通りその各点で C_0 と接することがわかる. しかも, Q は 3点 $(A : B : C) = (1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ で通常 2重点を持つ. また, $A \mapsto \frac{1}{A}, B \mapsto \frac{1}{B}, C \mapsto \frac{1}{C}$ なる Cremona 変換 τ を施すと円錐曲線 C_0 と 4次曲線 Q とは互いに移りあうこともわかる. 4点 $(A : B : C) = (1 : \pm 1 : \pm 1)$ は Cremona 変換 τ の固定点でもある.

そこで, 2重被覆 d_1 について考える. 分岐因子 $C_0 + Q$ が特異点を持つため, それを解消した上で 2重被覆をとることにする. これらの特異点はすべて単純特異点であるから, 得られる非特異曲面 S は $K3$ 曲面であることがわかる. (一般に, 6次曲線で分岐する $P_2(\mathbb{C})$ の 2重被覆は $K3$ 曲面であることがわかっている. このことに関しては, たとえば, [2] を参照のこと.) 特異点解消は具体的には次のように行う. まず, Q の 3つの 2重点 $(A : B : C) = (1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ でブローイングアップを行う. 続いて, Q と C_0 の 4接点 $(A : B : C) = (1 : \pm 1 : \pm 1)$ の各点でブローアップし, 各々の例外曲線上の Q, C_0 の固有変換が交わる点でもブローイングアップを行う. この段階で, 2重被覆 d_1 の分岐因子は非特異となり, 得られる曲面 S も非特異である.

さらに, 2重被覆 d_2 が惹き起こす, S の 2重被覆 \tilde{d}_2 の分岐因子は, S 上の互いに交わらない 16本の自己交叉数 -2 の曲線であることが確かめられる. このことによって, S は Kummer 曲面であることが示される. ([2] を参照.)

以上で, 定理 1 の主張は大略示されたこととなるが, さらに, Kummer 曲面 S はいくつかの楕円曲面の構造をもつ. これを調べる際に有用なのは, 以下の定理である. ([7] を参照.)

定理 2. $K3$ 曲面 X に自己交叉数 -2 の既約成分からなる互いに交わらない自己交叉数 0 の因子 D_1, \dots, D_k が与えられたとする. このとき, X は $P_1(\mathbb{C})$ 上の D_1, \dots, D_k を特異ファイバーにもつ楕円曲面の構造が入る.

この定理を用い, さらに詳しい考察を行うことで, 上記の Kummer 曲面 S は $P_1(\mathbb{C})$ 上の 4つの I_0^* 型特異ファイバー (楕円曲面の特異ファイバーの分類等詳しいことは, [2, 4] を参照していただきたい) をもつ楕円曲面の構造で, 以下のように特徴づけられるもの: 得られる:

- 楕円曲面 $\pi_0 : S \rightarrow P_1(\mathbb{C}) : 2$ 重被覆 $d_1 : S \rightarrow P_2(\mathbb{C})$ によって $P_2(\mathbb{C})$ 上の 4点 $(A : B : C) = (1 : \pm 1 : \pm 1)$ を通る円錐曲線のペンシルと対応づけられる.

- 楕円曲面 $\pi_1, \pi_2 : S \rightarrow P_1(\mathbb{C}) : 2$ 重被覆 $d_1 : S \rightarrow P_2(\mathbb{C})$ によって $P_2(\mathbb{C})$ 上の 7 点 $(A : B : C) = (1 : \pm 1 : \pm 1), (1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ を通り 2 次曲線 C_0 と 4 次曲線 Q とにそれぞれ接する 3 次曲線の族と対応づけられる. π_1 と π_2 とは S の自己同型写像で移りあう.

楕円曲面 π_1, π_2 のファイバーに対応する $P_2(\mathbb{C})$ 上の 7 点 $(A : B : C) = (1 : \pm 1 : \pm 1), (1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ を通り 2 次曲線 C_0 と 4 次曲線 Q とにそれぞれ接する 3 次曲線は, $y_1 q_1^2 + y_2 q_2^2 + y_3 q_3^2 = 0$ なる係数 q_1, q_2, q_3 を用いて, $q_1 A(B^2 - C^2) + q_2 B(C - A) + q_3 C(A - B) = 0$ とあらわすことが可能である. これらの 3 次曲線は, 先にふれた Cremona 変換 τ について不変であることが容易に確かめられる. (一方, 4 次曲線 Q と 2 次曲線 C_0 は Cremona 変換 τ によって互いに移りあうのであった.)

ここで, 3 節で述べた, 固有ベクトル写像のいくつかの捉え方についてふりかえっていただきたい. 本稿の立場では, 固有ベクトル写像とは有理型写像 $f : C \times C' \dashrightarrow P_2(\mathbb{C})$ であったが, 捉え方 2 のように, 積分曲線 C 上の点でパラメタ付けられたスペクトル曲線 C' から $P_2(\mathbb{C})$ への正則写像の族, と考えることも, また, 捉え方 3 のように, スペクトル曲線 C' 上の点でパラメタ付けられた積分曲線 C から $P_2(\mathbb{C})$ への正則写像の族, と考えることも可能である. 実は, この捉え方 2 でのスペクトル曲線からの正則写像の像の族は, 上で現れた $P_2(\mathbb{C})$ 上の 7 点 $(A : B : C) = (1 : \pm 1 : \pm 1), (1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ を通り 2 次曲線 C_0 と 4 次曲線 Q とにそれぞれ接する 3 次曲線の族であることが少し長い計算によって確かめられる. したがって, 捉え方 2 には楕円曲面 π_1, π_2 が対応することが分かる. 他方で, 捉え方 3 での積分曲線からの写像の像の族は, $P_2(\mathbb{C})$ 上の 4 点 $(A : B : C) = (1 : \pm 1 : \pm 1)$ を通る円錐曲線のペンシルとなることもわかる. よって, 捉え方 3 には楕円曲面 π_0 が対応する.

参考文献

- [1] M. Audin, *Spinning Tops*, Cambridge Univ. Press, 1996.
- [2] W. Barth, K. Hulek, C. Peters, and A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, second enlarged ed., Springer, 2004.
- [3] P. A. Griffiths, Linearizing flows and a cohomological interpretation of Lax equations, *Amer. J. of Math.*, 107, 1445-1483, 1985.
- [4] K. Kodaira, On compact complex analytic surfaces I, II, III, *Ann. of Math.*, 71(1), 111-152, 1960; 77(3), 563-626, 1963; 78(1), 1-40, 1963.
- [5] I. Naruki and D. Tarama, Some elliptic fibrations arising from free rigid body dynamics, preprint.
- [6] I. Naruki and D. Tarama, Eigenvector mapping for Manakov equation on $\mathfrak{so}(3)$ as a branched covering of $P_2(\mathbb{C})$, in preparation.
- [7] I. I. Pjateckii-Sapiro and I. R. Safarevic, A Torelli theorem for algebraic surfaces of type $K3$, *Math. USSR Izvestija*, 35(3), 547-588, 1971.

A_∞ 型超ケーラー多様体の体積増大度

服部 広大

東京大学大学院数理科学研究科

1 概要

本講演の主結果は次の通りである. リーマン多様体 (X, g) に対し, $p_0 \in X$ を中心とする半径 r の測地球の体積を $V_g(p_0, r)$ と書くことにする. このとき, 任意の $3 < \alpha < 4$ に対して,

$$0 < \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{V_g(p_0, r)}{r^\alpha}, \quad \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{V_g(p_0, r)}{r^\alpha} < +\infty$$

を満たす実 4 次元完備リッチ平坦多様体 (X, g) が存在する.

2 リーマン多様体の体積増大度

リーマン多様体 (X, g) に対し, $p_0 \in X$ を中心とする半径 r の測地球の体積を $V_g(p_0, r)$ と書くことにする. このとき, $V_g(p_0, r)$ は $r > 0$ に関して非減少であり, 正值であることに注意しておく.

定義 2.1. 非減少な関数 $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ に対して

$$0 < \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{V_g(p_0, r)}{f(r)}, \quad \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{V_g(p_0, r)}{f(r)} < +\infty$$

を満たすならば, この両者は同値 $V_g(p_0, r) \simeq_r f(r)$ であると定める.

次の命題は, Bishop-Gromov の比較定理より従う.

命題 2.2. (X, g) をリッチ曲率が下に有界なリーマン多様体とする. このとき, 任意の 2 点 $p_0, p_1 \in X$ に対して

$$0 < \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{V_g(p_1, r)}{V_g(p_0, r)}, \quad \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{V_g(p_1, r)}{V_g(p_0, r)} < +\infty$$

が成立する.

命題 2.2 によって, 体積増大度が次のように定義される.

定義 2.3. (X, g) をリッチ曲率が下に有界なリーマン多様体とする. 非減少な関数 $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ と, ある $p_0 \in X$ に対して $V_g(p_0, r) \simeq_r f(r)$ となるとき, $f(r)$ を g の体積増大度と呼ぶ. 命題 2.2 より, 体積増大度は測地球の中心 p_0 の取り方に依らない.

ここまではリッチ曲率が下に有界であることを仮定してきたが, さらに強く, リッチ曲率が非負ならば次のことが Bishop-Gromov の比較定理より従う.

命題 2.4. (X, g) のリッチ曲率は非負であるとする. このとき,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{V_g(p_0, r)}{r^n} < +\infty$$

が存在する. ただし $n = \dim X$ である.

命題 2.4 を言い換えると,

「リッチ曲率が非負であるような n 次元リーマン多様体の体積増大度は, 高々 r^n である.」

ということを主張している.

3 非コンパクト完備超ケーラー多様体

まず, 超ケーラー多様体の定義を述べる.

定義 3.1. (X, g) を実 $4n$ 次元リーマン多様体とし, I_1, I_2, I_3 を X 上の複素構造とする. また, g は各複素構造 I_i に関してエルミート計量であるとする. (I_1, I_2, I_3) が $I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 = I_1 I_2 I_3 = -\text{id}$ を満たし, 各基本 2-形式 $\omega_i := g(I_i \cdot, \cdot)$ が閉形式であるとき, (X, g, I_1, I_2, I_3) を超ケーラー多様体と呼ぶ. また, この g を超ケーラー計量と呼ぶ.

注 3.2. 任意の超ケーラー計量はリッチ平坦である. 故に体積増大度が定義され, 命題 2.4 よりその増大度は高々 $r^{\dim X}$ となる.

ここでは, 実 4 次元非コンパクト完備超ケーラー多様体の例とその体積増大度をいくつか紹介する.

\mathbb{R}^k をユークリッド空間, T^l を平坦計量付きトーラスとし, $\mathbb{R}^k \times T^l$ にこれらの直積計量を入れる. このとき, $k = 1, 2, 3, 4$ に対して $\mathbb{R}^k \times T^{4-k}$ は非コンパクト完備超ケーラー多様体であり, 体積増大度は r^k である.

次に平坦でない超ケーラー多様体の例を挙げる. Γ を $SU(2)$ の有限部分群とする. $SU(2)$ は \mathbb{C}^2 への自然な作用を持つので, Γ もまた \mathbb{C}^2 に作用する. そこで, \mathbb{C}^2/Γ の minimal resolution を

$$\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma$$

とする. ここで, $E := \pi^{-1}(0)$ とおくと, $\pi|_{X \setminus E} : X \setminus E \rightarrow (\mathbb{C}^2/\Gamma) \setminus \{0\}$ は微分同相であることに注意する. また, r を \mathbb{C}^2/Γ 上の原点からの距離をあらわす関数とする.

定理 3.3 ([8]). X 上には以下の性質を満たす完備超ケーラー計量 g が存在する.

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(r^{-4}). \quad (1)$$

ただし, g_{ij} は $(\pi^{-1})^*g$ のユークリッド座標 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ に関する座標表示であり, δ_{ij} はクロネッカーのデルタ (すなわち, ユークリッド計量の座標表示) である.

(1) の性質を満たすリーマン多様体は, ALE (Asymptotically Locally Euclidean) 計量と呼ばれる. (正確には, g_{ij} の微分が無窮遠でしかるべきオーダーで減衰することも条件に含める.) すなわち, ALE とは大雑把に言えば「無窮遠での挙動がユークリッド計量に充分近い計量」という意味である. 従って, 定理 3.3 の超ケーラー計量の体積増大度は r^4 となる.

上記の状況で, 特に $\Gamma = \mathbb{Z}_k$ ($k \geq 0$) のとき, X 上には以下のような ALE でない計量の存在が知られている.

定理 3.4 ([7]). $\Gamma = \mathbb{Z}_k$ ($k \geq 0$) のとき, X 上の完備超ケーラー計量 h で, 体積増大度が r^3 となるものが存在する.

このように, 体積増大度が r^k ($k > 0$ は整数) となる例は, 計量が平坦でない場合でも存在する.

これに対し [2][3][9] では, 体積増大度が $r^{\frac{2n}{n+1}}$ となる複素 $2n$ 次元完備リッチ平坦ケーラー計量が構成されている. 従って, $n = 2$ とすれば実 4 次元完備超ケーラー計量で体積増大度が $r^{4/3}$ となるものが存在することがわかる.

4 A_∞ 型超ケーラー多様体の体積増大度

定理 3.3 で述べた ALE 空間は, $\Gamma = \mathbb{Z}_{k+1}$ のときは特に A_k 型 ALE 空間と呼ばれる. A_k 型 ALE 空間は初め Gibbons と Hawking によって構成された [4]. 彼らの構成法は, $k+1$ 個のパラメーターを最初に設定し, ある手続きに従うと $b_2 = k$ の実 4 次元完備超ケーラー多様体が構成できる, というものである.

それに対し Anderson-Kronheimer-LeBrun は, 可算無限個のパラメーターから出発して [4] と同様の手続きを踏むと, $b_2 = \infty$ の実 4 次元完備超ケーラー多様体が構成されることを示した [1]. また, 同じ超ケーラー多様体が超ケーラー商としても構成できることが Goto によって示されている [5]. 彼らによって構成されたこの実 4 次元完備超ケーラー多様体を, 本講演では A_∞ 型超ケーラー多様体と呼ぶことにする.

[1] では, 下記のパラメーターの空間

$$(\mathrm{Im}\mathbb{H})_0^{\mathbb{Z}} := \left\{ \lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in (\mathrm{Im}\mathbb{H})^{\mathbb{Z}}; \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + |\lambda_n|} < +\infty \right\}$$

の各元 $\lambda \in (\mathrm{Im}\mathbb{H})_0^{\mathbb{Z}}$ に対して, A_∞ 型超ケーラー多様体 (X_λ, g_λ) を構成している. ここで, $\mathrm{Im}\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$ は四元数代数 \mathbb{H} の純虚数からなる 3 次元の部分空間である. すると, 多様体 X_λ はパラメーター λ の取り方に依らないが, 超ケーラー計量 g_λ は λ に応じて変わる. 筆者は, 各 λ に対して g_λ の体積増大度を評価し, 以下の結果を得た.

定理 4.1 ([6]). 任意の $\lambda \in (\mathrm{Im}\mathbb{H})_0^{\mathbb{Z}}$ と $p_0 \in X_\lambda$ に対し, $V_{g_\lambda}(p_0, r)$ は

$$0 < \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{V_{g_\lambda}(p_0, r)}{r^2 \tau_\lambda^{-1}(r^2)} \leq \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{V_{g_\lambda}(p_0, r)}{r^2 \tau_\lambda^{-1}(r^2)} < +\infty$$

を満たす. ただし, 関数 $\tau_\lambda : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ は

$$\tau_\lambda(R) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{R^2}{R + |\lambda_n|}$$

によって定義される.

特に, λ をうまくとって定理 4.1 を使うことにより, 次のような体積増大度を持つ完備超ケーラー多様体の存在を示した.

定理 4.2 ([6]). 任意の $3 < \alpha < 4$ に対し, 体積増大度が r^α となるような A_∞ 型超ケーラー計量 g_λ が存在する.

参考文献

- [1] Anderson, T., Kronheimer, P., LeBrun, C.: Complete Ricci-flat Kähler manifolds of infinite topological type. *Commun. Math. Phys.* **125**, 637-642 (1989)
- [2] Bando, S., Kobayashi, R.: Ricci-flat Kähler metrics on affine algebraic manifolds, *Geometry and analysis on manifolds. Lect. Notes Math.* 1339, Sunada, T. (editor) 20-31, Berlin Heidelberg New York, Springer (1988)
- [3] Bando, S., Kobayashi, R.: Ricci-flat Kähler metrics on affine algebraic manifolds II. *Math. Ann.* **287**, 175-180 (1990)
- [4] Gibbons, G.W., Hawking, S.W.: Gravitational multi-instantons. *Phys. Lett.* 78B:4, 430-432 (1978)
- [5] Goto, R.: On hyper-Kähler manifolds of type A_∞ . *Geom. Funct. Anal.* **4**, No. 4, 424-454 (1994)
- [6] Hattori, K.: The volume growth of hyperkähler manifolds of type A_∞ , preprint. arXiv:math.DG/1006.5504v1
- [7] Hawking, S.W.: Gravitational Instantons. *Phys. Lett.* **A60**, 81 (1977)
- [8] Kronheimer, P.B.: The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients. *Journal of Diff. Geom.* **29**, 665-683 (1989)
- [9] Tian, G., Yau, S.T.: Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature I. *Journal of the American Mathematical Society* Vol. **3**, No. 3, 579-609 (1990)

偏極多様体の相対安定性について

新田 泰文 (立命館大学理工学部)

1 はじめに

本講演は、満洲俊樹先生 (大阪大学) との共同研究 [9] に基づく。偏極多様体における特殊計量の存在問題は、その多様体の幾何学的不変式論の意味での安定性との関係が示唆され ([13], [14]), これまでに様々な観点から議論がなされてきた。特に定スカラー曲率ケーラー計量の存在問題においては以下の予想が知られており、現在も非常に活発に研究が進められている:

予想 1 (Donaldson-Tian-Yau 予想). 偏極多様体 (M, L) について, $c_1(L)$ が定スカラー曲率ケーラー計量を持つための必要十分条件は (M, L) が K -安定であることであろう。

一方, 端的ケーラー計量の存在について, どのような安定性が対応しているのかという問題を考えることが出来るが, このことについては現在の所, 漸近的相対 Chow-安定性 ([8]) と相対 K -安定性 ([12]) が知られている。Donaldson-Tian-Yau 予想の直接の一般化として, 以下の予想が知られている。偏極多様体 (M, L) の正則自己同型群 $\text{Aut}(M)$ の極大コンパクト部分群 K について, ケーラー類 $c_1(L)$ に関する端的ケーラーベクトル場 $\nu \in \mathfrak{k} = \text{Lie}K$ を取る。 \mathcal{T}_{ex} を G の代数的トーラス T でその極大コンパクト部分群が K に含まれ, さらに ν が生成する 1 次元代数的トーラスを含むようなもの全体からなる集合とし, $T \in \mathcal{T}_{\text{ex}}$ を固定する。

予想 2. 偏極多様体 (M, L) について, $c_1(L)$ が端的ケーラー計量を持つための必要十分条件は (M, L) が T に関し相対 K -安定であることであろう。

本講演ではこの予想に関わる基本的な問題として, 与えられた二つの相対安定性の間の関係について考察する。 $T \in \mathcal{T}_{\text{min}}$ と仮定して, 以下の問題を考える (\mathcal{T}_{min} の定義は次節を参照せよ)。

問題 1. 偏極多様体 (M, L) が T に関して相対 K -安定ならば, (M, L) は T に関して漸近的相対 Chow-安定か?

講演では, この問題に関して得られた最近の研究成果について紹介したいと思う。

2 相対 K -安定性と相対 Chow-安定性

ここでは偏極多様体の相対 K -安定性と相対 Chow-安定性の定義を行う。まず, 幾つかの必要な言葉の準備を行う。以下, M を n 次元連結コンパクト複素多様体とし, L を M 上の非常に豊富な正則線束とする。(組 (M, L) のことを偏極多様体と呼ぶ。) M の正則自己同型群 $\text{Aut}(M)$ の極大連結線型代数部分群 G を, Chevalley 分解によって

$$G = R_{\mathbb{C}} \times U$$

と表す。ただし $R_{\mathbb{C}}$ は簡約代数群で U は G の冪単根基である。 $G, R_{\mathbb{C}}$ の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{r}$ とおく。ここで, [2] において漸近的 Chow-半安定性の障害として定義された Lie 環の指標

$$\mathcal{F}_p : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}, \quad p = 1, \dots, n$$

を考える. \mathcal{F}_1 は定数倍を除いて M の二木不変量と一致する. \mathfrak{r} の中心 \mathfrak{z} について部分空間 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z}$ を $\mathfrak{a} := \{A \in \mathfrak{z} \mid \mathcal{F}_p(A) = 0, p = 1, \dots, n\}$ で定義する. ここで, [3] で定義された非退化な対称二次形式 $\langle, \rangle_0 : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ を用いて, 複素 Lie 環 $\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{z}$ を

$$\mathfrak{b}_0 := \{B \in \mathfrak{z} \mid \langle A, B \rangle_0 = 0 (\forall A \in \mathfrak{a})\}$$

で定義する. この時 $\ker \mathcal{F}_1$ は $\mathfrak{t}_{\text{ex}} := \mathbb{C}\mathcal{V}$ と直交するので, $\mathfrak{t}_{\text{ex}} \subset \mathfrak{b}_0$ が成り立つ.

さて,

$$V_m := H^0(M, \mathcal{O}(L^m)), \quad m = 1, 2, \dots$$

とおく. \mathfrak{g} の M への無限小作用は L 上の無限小作用へとリフトするので, このことから V_m への作用が自然に誘導される. さらにその traceless part を考えることで $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V_m)$ とみなすことが出来る. ここで $\mathfrak{sl}(V_m)$ 上の対称二次形式 \langle, \rangle_m を

$$\langle A, B \rangle_m := \text{Tr}(AB)/m^{n+2}, \quad A, B \in \mathfrak{sl}(V_m)$$

で定義する (この時 \langle, \rangle_m は $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{sl}(V_m)$ 上非退化であることに注意せよ). 複素 Lie 環 $\mathfrak{b}_m \subset \mathfrak{z}$ を

$$\mathfrak{b}_m := \{B \in \mathfrak{z} \mid \langle A, B \rangle_m = 0 (\forall A \in \mathfrak{a})\}$$

で定義し, \mathfrak{z} の部分 Lie 環で,

$$\mathfrak{b}_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

によって生成されるものを $\mathfrak{t}_{\text{min}}$ とおく (例えば, $\text{Aut}(M)$ が離散的な場合や [2], [4] における漸近的 Chow-半安定性の障害が消えている場合は $\mathfrak{t}_{\text{min}} = \{0\}$ となる). \mathcal{T}_{min} を, G の代数的トーラス T でその極大コンパクト部分群が K に含まれ, その Lie 環 $\mathfrak{t} := \text{Lie}T$ について

$$\mathfrak{t}_{\text{min}} \subset \mathfrak{t}$$

となるようなもの全体からなる集合とする. このとき, $\mathfrak{t}_{\text{ex}} \subset \mathfrak{t}_{\text{min}}$ なので, $\mathcal{T}_{\text{min}} \subset \mathcal{T}_{\text{ex}}$ が成り立つ.

任意の $T \in \mathcal{T}_{\text{ex}}$ についてその V_m への作用を考え, weight 分解によって

$$V_m = \bigoplus_{k=1}^{\nu_m} V(\chi_{m,k})$$

と表す. ただし $\chi_{m,k}$ は T の指標で

$$V(\chi_{m,k}) = \{v \in V_m \mid g \cdot v = \chi_{m,k}(g)v\}$$

である. この分解に対して, 代数的部分群 $S_m \subset \text{SL}(V_m)$ を

$$S_m := \prod_{k=1}^{\nu_m} \text{SL}(V(\chi_{m,k}))$$

で定義し, $\text{SL}(V_m)$ における S_m の中心化群を H_m とおく. このとき, T の $\text{SL}(V_m)$ における中心化群 $Z_m(T) \subset \text{SL}(V_m)$ について, $Z_m(T) = H_m \cdot S_m$ が成り立ち, その Lie 環 $\mathfrak{z}_m(T)$ については

$$\mathfrak{z}_m(T) = \mathfrak{h}_m + \mathfrak{s}_m$$

となる. ただし $\mathfrak{h}_m = \text{Lie}H_m$, $\mathfrak{s}_m = \text{Lie}S_m$ である. 任意の複素部分 Lie 環 $\mathfrak{r} \subset \text{SL}(V_m)$ について

$$\mathfrak{r}_{\mathbb{Z}} := \{X \in \mathfrak{r} \mid \exp(2\pi\sqrt{-1}X) = \text{id}_{V_m}\}$$

とおく. 特に \mathfrak{r} が可換な場合, $\mathfrak{r}_{\mathbb{R}} := \mathfrak{r}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とおいてこれを \mathfrak{r} の実部分 Lie 環とみなす. ここで $\mathfrak{r} = \mathfrak{h}_m$ とし, \mathfrak{h}_m 上の非退化二次形式 \langle, \rangle_m について \mathfrak{t} の直交補空間をとり, これを \mathfrak{t}_m^{\perp} と表す. 対応する H_m の代数的トーラスを T_m^{\perp} とおき, $Z_m(T)$ の部分代数群 $G_m(T)$ を

$$G_m(T) := T_m^{\perp} \cdot S_m$$

で定義する.

一方, [8] で定義された $(\mathfrak{h}_m)_{\mathbb{R}}$ 上の “piecewise bilinear form” \langle, \rangle'_m によって \mathfrak{t} の直交補空間を取り, これを \mathfrak{t}_m^{\perp} とおく (この部分の厳密な定義は [8] を参照せよ). \mathfrak{t}_m^{\perp} を用いて, $(\mathfrak{h}_m)_{\mathbb{Z}}$ の部分集合 $(\mathfrak{g}'_m)_{\mathbb{Z}}$ を

$$(\mathfrak{g}'_m)_{\mathbb{Z}} = (\mathfrak{t}_m^{\perp})_{\mathbb{Z}} + (\mathfrak{s}_m)_{\mathbb{Z}}$$

で定義する.

2.1 相対 Chow-安定性

以上の準備の下で, 相対 Chow-安定性の定義を行う. $T \in \mathcal{T}_{\text{ex}}$ を固定する. $m \in \mathbb{N}$ について小平埋め込み $\Phi_{|L^m|} : M \rightarrow \mathbb{P}^*(V_m)$ を考え, $M_m := \Phi_{|L^m|}(M) \subset \mathbb{P}^*(V_m)$ とおく. d_m を $M_m \subset \mathbb{P}^*(V_m)$ の次数とし, $W_m := \{\text{Sym}^{d_m}(V_m)\}^{\otimes n+1}$ とおく. このとき, $\hat{M}_m \in W_m^*$ で $[\hat{M}_m] \in \mathbb{P}^*(W_m)$ が M_m の Chow-点となるようなものが, 定数倍を除いて一意的存在する. W_m^* 上の自然な $\text{SL}(V_m)$ -作用が誘導する $G_m(T)$ の作用を考える.

定義 1.

1. 軌道 $G_m(T) \cdot \hat{M}_m$ が W_m^* の閉集合であるとき, (M, L^m) は T に関して相対 Chow-安定であるという.
2. 十分大きな任意の $m \gg 1$ について (M, L^m) が T に関して相対 Chow-安定である時, (M, L) は T に関して漸近的相対 Chow-安定であるという.

2.2 相対 K-安定性

次に相対 K-安定性の定義を与える. $T \in \mathcal{T}_{\text{ex}}$ を固定する. 任意の $X \in \mathfrak{z}_m(T)_{\mathbb{Z}}$ に対して, [11] の方法で X が生成する (M, L) の test configuration を構成する (test configuration の定義は [1] を参照). X は V_m 上の \mathbb{C}^* -作用を生成するので, これを

$$\varphi_X : \mathbb{C}^* \rightarrow Z_m(T)$$

と表す. 部分代数多様体 $\mathcal{M}^X \subset \mathbb{P}^*(V_m) \times \mathbb{A}^1$ を

$$\bigcup_{t \in \mathbb{C}^*} (\varphi_X(t)(M_m) \times \{t\}) \subset \mathbb{P}^*(V_m) \times \mathbb{A}^1$$

の閉包として定義し, $\pi_X : \mathcal{M}^X \rightarrow \mathbb{A}^1$ を自然な射影 $\mathbb{P}^*(V_m) \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$ の \mathcal{M}^X への制限とする. この時, \mathcal{M}^X には自然な方法で, \mathbb{A}^1 には

$$\mathbb{C}^* \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1, \quad (s, t) \mapsto st$$

によって \mathbb{C}^* が作用しているが, これらの作用について π_X は \mathbb{C}^* -同変な射影射である. さらに, $p_1 : \mathcal{M}^X \rightarrow \mathbb{P}^*(V_m)$ を自然な射影 $\mathbb{P}^*(V_m) \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{P}^*(V_m)$ の \mathcal{M}^X への制限とし, $\mathcal{L}^X := p_1^*(\mathbb{P}^*(V_m)(1))$ とおく. この時 \mathcal{L}^X は π_X について relatively very ample で, 定義より任意の $z \in \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ について

$$(\mathcal{M}_z^X, \mathcal{L}_z^X) \cong (M, L^m)$$

が成り立つ. ただし, 任意の $z \in \mathbb{A}^1$ について $\mathcal{M}_z^X := \pi_X^{-1}(\{z\})$ で, \mathcal{L}^X の \mathcal{M}_z^X への制限を \mathcal{L}_z^X とする. また, \mathcal{M}^X 上の \mathbb{C}^* -作用は自然に \mathcal{L}^X 上の \mathbb{C}^* -作用へとリフトする. よって, $(\mathcal{M}^X, \mathcal{L}^X)$ は (M, L) の指数 m の test configuration となる. さらに, T の $\mathbb{P}^*(V_m)$ への作用は $\mathbb{P}^*(V_m) \times \mathbb{A}^1$ への作用を誘導するが, T は φ_X の作用と可換であるためこの作用は \mathcal{M}^X を保つ. 従って, $(\mathcal{M}^X, \mathcal{L}^X)$ 上の T -作用が誘導されるが, これは $(\mathcal{M}^X, \mathcal{L}^X)$ 上の \mathbb{C}^* -作用と可換である.

さて, 自然数 $l \in \mathbb{N}$ について, \mathbb{A}^1 上のベクトル束 E_l^X を $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(E_l^X) = (\pi_X)_*\{(\mathcal{L}^X)^l\}$ で定義する. この時, 十分大きな $l \gg 1$ について

$$(E_l^X)_0 \cong H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{O}((\mathcal{L}_0^X)^l))$$

が成り立つ. $N_l := \dim_{\mathbb{C}} V_{lm} = \dim_{\mathbb{C}}(E_l^X)_0$ とし, $(E_l^X)_0$ に誘導される \mathbb{C}^* -作用の weight を w_l とおく. この時, 十分大きな $l \gg 1$ について,

$$\begin{cases} N_l = a_n l^n + a_{n-1} l^{n-1} + \cdots + a_1 l + a_0, \\ w_l = b_{n+1} l^{n+1} + b_n l^n + \cdots + b_1 l + b_0 \end{cases}$$

と書くことが出来る. ここに a_i, b_j ($i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, n+1$) は有理数で l に依存しない. 従って, 十分大きな $l \gg 1$ について, 商 w_l/lN_l は

$$\frac{w_l}{lN_l} = F_0 + F_1 l^{-1} + F_2 l^{-2} + \cdots$$

と展開することが出来る. ここで $F_i = F_i(\mathcal{M}^X, \mathcal{L}^X) \in \mathbb{Q}$, ($i = 0, 1, 2, \dots$) は l に依存しない. この時, $F_1 = F_1(\mathcal{M}^X, \mathcal{L}^X)$ を, test configuration $(\mathcal{M}^X, \mathcal{L}^X)$ の *Donaldson-Futaki invariant* と呼ぶ.

以上の準備の下, 相対 K -安定性を以下で定義する.

定義 2. 任意の $X \in (\mathfrak{g}'_1)_{\mathbb{Z}} \setminus \mathfrak{g}$ について $F_1(\mathcal{M}^X, \mathcal{L}^X) < 0$ となるとき, (M, L) は T に関して相対 K -安定であるという.

3 K -安定性と漸近的 Chow-安定性について

最後に, Donaldson-Tian-Yau 予想に関わって, K -安定性についても問題 1 と同様の問題を考える事が出来る:

問題 2. 偏極多様体 (M, L) について, K -安定性から漸近的 Chow-安定性が導かれるか?

この問題については, [10] によってケーラー・アインシュタイン計量を許容するが漸近的 Chow-安定でない 7 次元トーリックファノ多様体が存在することが示された. このことと [6], [7] の結果を併せると, この例が問題 2 の反例になっていることが分かる. 特に, 問題 2 は一般には成立しない. また, M が特異点を許容した場合, 自己同型群が離散的な場合であっても K -安定性から漸近的 Chow-安定性が導かれないことが尾高悠志氏によって報告されている.

参考文献

- [1] S.K. Donaldson, Scalar curvature and stability of toric varieties, J. Differential Geom. 62 (2002), 289–349.
- [2] A. Futaki, Asymptotic Chow-semistability and integral invariants, Internat. J. Math. 15 (2004), 967–979.
- [3] A. Futaki and T. Mabuchi, Bilinear forms and extremal Kähler vector fields associated with Kähler classes, Math. Ann. 301 (1995), 199–210.
- [4] T. Mabuchi, An obstruction to asymptotic semistability and approximate critical metrics, Osaka J. Math. 41 (2004), 463–472.
- [5] T. Mabuchi, An energy-theoretic approach to the Hitchin-Kobayashi correspondence for manifolds, I, Invent. Math. 159 (2005), 225–243.

- [6] T. Mabuchi, K-stability of constant scalar curvature polarization, arXiv:math.DG/0812.4093.
- [7] T. Mabuchi, A stronger concept of K-stability, arXiv:0910.4617v1.
- [8] T. Mabuchi, Relative stability and extremal metrics, preprint.
- [9] T. Mabuchi and Y. Nitta, K-stability and asymptotic Chow stability, preprint.
- [10] H. Ono, Y. Sano and N. Yotsutani, An example of asymptotically Chow unstable manifolds with constant scalar curvature, arXiv:mathDG/0906.3836.
- [11] S. T. Paul and G. Tian, Algebraic and analytic K-stability, arXiv:math.DG/0405530.
- [12] G. Székelyhidi, Extremal metrics and K-stability, Bull. London Math. Soc. 39 (2007), 76–84.
- [13] S.-T. Yau, Open problems in geometry, Proc. Symposia Pure Math. 54 (1993), 1–28.
- [14] S.-T. Yau, Perspectives on geometric analysis, arXiv:math.DG/0602363v2.

Kolmogorov 複雑性と平均次元とゲージ理論

松尾 信一郎*

東京大学大学院数理科学研究科

第 57 回幾何学シンポジウム (神戸大学)

概要

コンパクト無限次元力学系に対して、その軌道のアルゴリズム理論的複雑性を考察することにより新しい不変量を定義し、その不変量と Gromov の平均次元との関係を研究した。

1 序

非コンパクト四次元多様体上で反自己双対接続のモジュライ空間を考えると、**コンパクト無限次元力学系**に出会うことがある。例えば、次のような状況である。 X を $S^3 \times \mathbb{R}$ として、 P を X 上の自明 $SU(2)$ 束とする。このとき、各非負実数 d に対して、 P 上の反自己双対接続のなすモジュライ空間 \mathcal{M}_d を、

$$\mathcal{M}_d := \{[A] \mid F_A^+ = 0 \text{ and } \|F_A\|_\infty \leq d\}$$

と定義する。このモジュライ空間 \mathcal{M}_d は、広義一様収束の位相を与えるときコンパクト距離化可能空間であり、 d が十分大きいとき無限次元である。また、 X への無限巡回群 \mathbb{Z} の作用に由来して、 \mathcal{M}_d にも \mathbb{Z} は作用する。すなわち、モジュライ空間 \mathcal{M}_d はコンパクト無限次元力学系である。

さて、コンパクト無限次元力学系を如何にしてして研究するか。一つの観点は**平均次元 (mean dimension)** である。これは「無限次元空間の次元」であり、コンパクト力学系の位相不変量として、1999 年に M. Gromov[1] により導入された。モジュライ空間 \mathcal{M}_d の平均次元の観点からの研究には、論文 [6] がある。本講演ではさらなる一つの観点を提示したい。平均次元の定義は、位相的エントロピーの定義に範を採っており、力学系の軌道の**平均的な**「複雑さ」を定量化したものである。各軌道**それぞれの**「複雑さ」を適切に取り出すことにより、平均次元を精密化した不変量である**平均軌道複雑性(mean orbit complexity)**を定義することができる。「複雑さ」を定量化するための数学的な枠組みの一つが**Kolmogorov 複雑性**[3] であり、アルゴリズム的情報理論で研究されてきた。平均次元は力学系そのものの不変量だが、平均軌道複雑性は力学系の各点に対して定義される不変量である。また、各点の平均軌道複雑性は下から平均次元を抑え、平均軌道複雑性の最大値と平均次元は多くの場合に一致する。

* exotic@ms.u-tokyo.ac.jp

2 平均エントロピー次元

この節では**平均エントロピー次元 (mean entropy dimension)**を定義する。平均エントロピー次元は、Gromovによる平均次元の変種であって、無限巡回群が作用するコンパクト距離空間の実数値不変量として、Lindenstrauss and Weiss[4]により定義された。

(X, d) をコンパクト距離空間として、無限巡回群 \mathbb{Z} が連続に作用しているとせよ。 $k \in \mathbb{Z}$ の $x \in X$ への作用を $k \cdot x$ とあらわす。

自然数 n と正実数 ϵ に対して、部分集合 $S \subset X$ が (n, ϵ) -**集約集合**であるとは、任意の点 $x \in X$ に対して、点 $y \in S$ が存在して、全ての $k = 0, \dots, n-1$ において $d(k \cdot x, k \cdot y) < \epsilon$ が成り立つこととする。 (X, d) の (n, ϵ) -集約部分集合の個数の最小値を $s(X, d, \epsilon, n)$ とする。さらに、

$$S(X, d, \epsilon) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\log s(X, d, \epsilon, n)}{n} \right]$$

とおく。そして、平均エントロピー次元 $\dim_e(X, d : \mathbb{Z})$ は、

$$\dim_e(X, d : \mathbb{Z}) := \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{S(X, d, \epsilon)}{-\log \epsilon} \right]$$

により定義される。

3 Kolmogorov 複雑性と再帰関数

この節では**Kolmogorov 複雑性 (Kolmogorov complexity)**について解説する。標準的参考書としては [3] があり、幾何学者に親しみやすい解説としては [7] がある。

A を二点集合 $\{0, 1\}$ として、 Σ を A の元の有限列の全体からなる集合とする。すなわち、

$$\Sigma := \bigcup_{j=0}^{\infty} A^j$$

であり、例えば、 0 や 010101 や 000000111110010101010 は Σ の元である。また、元 $\sigma \in \Sigma$ の長さ $\ell(\sigma)$ を、 $\sigma \in A^n$ のときに $\ell(\sigma) := n$ として定める。例えば、 $\ell(0) = 1$ であり $\ell(010101) = 6$ である。

さて、 Σ の元の「複雑さ」というものを考えたい。A.N. Kolmogorov[2, p.210]曰く、「複雑さ」とは、

If some object has a “simple” structure, then for its description it suffices to have a small amount of information; but if it is “complex”, then its description must contain a lot of information.

とのことである。つまり、短く言い換えることができるものは単純であり、圧縮しようとしてもなかなかできないものは複雑である。例えば、次の数列の両者

```
00000000000000000000000000000000
0111010101011101000101001
```

はどちらが「複雑」だろうか。前者は0が24個並んだものであり、後者はたった今500円硬貨を24回投げてその表裏を書いたものである。前者を伝えるためには「0を24個並べよ」と短く言い換えることができるが、後者を伝えるためにはその数列そのものを繰り返すほかないであろう。従って、Kolmogorovによる情報の圧縮可能性の観点からは、前者は単純であり、後者は複雑である。このアイデアの数学的定式化が、**Kolmogorov 複雑性 (Kolmogorov complexity)** である。

定義 1. 任意の函数 $S: \Sigma \rightarrow \Sigma$ に対して、 S による Kolmogorov 複雑性 $K_S: \Sigma \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を

$$K_S(\sigma) := \min\{\ell(p) \mid p \in \Sigma \text{ and } S(p) = \sigma\}$$

と定める。ただし、 $\min \emptyset = \infty$ とする。

さて、この定義では函数 S に依存して複雑性 K_S が定まっている。例えば、 S を変えたときに K_S はどのように変化するのだろうか。Kolmogorov のさらなる洞察は、この問と**再帰函数 (recursive function)** との関連を喝破したことである。再帰函数とは、計算論や数学基礎論における概念であり、その計算規則がアルゴリズムにより「有限的に」与えられている函数のことである。厳密な定義は、例えば、数学辞典を参照のこと。

定理 2 (A.N.Kolmogorov, G.J. Chaitin, R.J. Solomonoff). 再帰函数 $U: \Sigma \rightarrow \Sigma$ が存在して、任意の再帰函数 $S: \Sigma \rightarrow \Sigma$ に対して、正定数 $C = C(U, S)$ が存在して、任意の $\sigma \in \Sigma$ に対して、

$$K_U(\sigma) \leq K_S(\sigma) + C$$

が成り立つ。再帰函数 U を**普遍再帰函数 (universal recursive function)** とよぶ。

普遍再帰函数は一意ではない。しかし、 U_1 と U_2 が普遍再帰函数であるとき、定数 $C = C(U_1, U_2)$ が存在して、任意の $\sigma \in \Sigma$ に対して、

$$|K_{U_1}(\sigma) - K_{U_2}(\sigma)| \leq C$$

が成り立つことが、この定理からすぐにわかる。また、 $id: \Sigma \rightarrow \Sigma$ は再帰函数なので、普遍再帰函数 U に対して、定数 $C = C(U)$ が存在して、任意の $\sigma \in \Sigma$ に対して、

$$K_U(\sigma) \leq \ell(\sigma) + C$$

が成り立つ。従って、Kolmogorov 複雑性は、長さ函数 ℓ に関して漸近的には、普遍再帰函数に依らずに定まる。

4 平均軌道複雑性

この節では**平均軌道複雑性 (mean orbit complexity)** を定義する。 (X, d) をコンパクト距離空間として、無限巡回群 \mathbb{Z} が連続に作用しているとせよ。 $k \in \mathbb{Z}$ の $x \in X$ への作用を $k \cdot x$ とあらわす。

定義 3. 写像 $C: \Sigma \rightarrow X$ であって、像 $C(\Sigma)$ が X で稠密なものを、 X の**粗視化函数 (coarse graining function)** とよぶ。ただし、 $A := \{0, 1\}$ であり、 $\Sigma := \cup_{j=0}^{\infty} A^j$ だった。

この粗視化函数により，Kolmogorov 複雑性と力学系は結びつく．また， $X^* := \cup_{j=0}^{\infty} X^j$ とするとき，粗視化函数 $C: \Sigma \rightarrow X$ から自然に $C^*: \Sigma^* \rightarrow X^*$ が定まる．

ところで， Σ は可算無限集合であり，辞書式順序

$$\varepsilon \leftrightarrow 0, \quad 0 \leftrightarrow 1, \quad 1 \leftrightarrow 2, \quad 00 \leftrightarrow 3, \quad 01 \leftrightarrow 4, \quad 10 \leftrightarrow 5, \quad 11 \leftrightarrow 6, \dots$$

によって，自然数のなす集合 \mathbb{N} との標準的な全単射が定まる．また， $\Sigma^* := \cup_{j=0}^{\infty} \Sigma^j$ とするとき， Σ^* も可算無限集合であり， \mathbb{N} との全単射が辞書式順序によって標準的に定まる．従って，標準的な全単射 $Q: \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ が存在する．

さて， $S: \Sigma \rightarrow \Sigma$ を普遍再帰函数とすると，これまでをまとめれば，粗視化函数 $C: \Sigma \rightarrow X$ を選ぶごとに，写像列

$$\Sigma \xrightarrow{S} \Sigma \xrightarrow{Q} \Sigma^* \xrightarrow{C^*} X^*$$

が定まることになる．この合成写像を $U_C = U := C^* \circ Q \circ S: \Sigma \rightarrow X^*$ とする． U によって，有限二進列 p は， X の点列 $U(p) := (U_1(p), \dots, U_{n-1}(p))$ として解釈することができる．

定義 4. 任意の点 $x \in X$ と自然数 n と正実数 ϵ に対して，

$$K_C(x, \epsilon, n) := \min\{\ell(p) \mid d(j \cdot x, U_j(p)) < \epsilon \text{ for any } j = 0, \dots, n-1\}$$

と定める．

像 $C(\Sigma)$ の X での稠密性と普遍再帰函数 S の全射性により，常に $K_C(x, \epsilon, n)$ は有限である．

さらに，

$$\bar{K}_C(x, \epsilon) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{K_C(x, \epsilon, n)}{n} \right], \quad \underline{K}_C(x, \epsilon) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{K_C(x, \epsilon, n)}{n} \right]$$

として，

$$\bar{K}_C(x) := \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\bar{K}_C(x, \epsilon)}{-\log \epsilon} \right], \quad \underline{K}_C(x) := \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\underline{K}_C(x, \epsilon)}{-\log \epsilon} \right]$$

と定める．

そして，平均軌道複雑性は次で定義される．

定義 5. X の平均軌道複雑性 $\overline{MK}: X \rightarrow \mathbb{R}$ と $\underline{MK}: X \rightarrow \mathbb{R}$ を，

$$\overline{MK}(x) := \sup_C \bar{K}_C(x), \quad \underline{MK}(x) := \sup_C \underline{K}_C(x).$$

により，定義する．ただし， \sup_C では粗視化函数 C の全体を動くものとする．

このとき，次が成り立つ．

定理 6 (M). X の任意の点 x に対して，

$$\underline{MK}(x) \leq \overline{MK}(x) \leq \dim_e(X, d: \mathbb{Z})$$

が成り立つ．

この定理の証明や平均軌道複雑性のさらなる性質については，論文 [5] を参照ください．

参考文献

- [1] Misha Gromov. Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps. I. *Math. Phys. Anal. Geom.*, Vol. 2, No. 4, pp. 323–415, 1999.
- [2] A. N. Kolmogorov. *Izbrannye trudy. Tom 3*. “Nauka”, Moscow, 2005. Teoriya informatsii i teoriya algoritmov. [Information theory and the theory of algorithms], Edited by A. N. Shiryaev.
- [3] Ming Li and Paul Vitányi. *An introduction to Kolmogorov complexity and its applications*. Texts in Computer Science. Springer, New York, third edition, 2008.
- [4] Elon Lindenstrauss and Benjamin Weiss. Mean topological dimension. *Israel J. Math.*, Vol. 115, pp. 1–24, 2000.
- [5] Shinichiroh Matsuo. Mean dimension and Kolmogorov complexity of orbits in dynamical systems. in preparation.
- [6] Shinichiroh Matsuo and Masaki Tsukamoto. Instanton approximation, periodic ASD connections, and mean dimension. arXiv:0909.1141.
- [7] Shmuel Weinberger. *Computers, rigidity, and moduli*. M. B. Porter Lectures. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005. The large-scale fractal geometry of Riemannian moduli space.

インスタントンを持たない開 4 次元多様体

塚本真輝 (京都大学大学院理学研究科) *

概要

非平坦なインスタントンを持たない、非コンパクト、向き付き、4次元、完備リーマン多様体の存在を示す。

1 序

タウベス [4] は、任意のコンパクト、向き付き、4次元リーマン多様体上には、非平坦なインスタントンが存在することを示した。すなわち、 X をコンパクト、向き付き、4次元リーマン多様体とすると、 X 上の主 $SU(2)$ 束であって、非平坦な ASD 接続 (反自己双対接続) を許容するものが存在する。ASD 接続は ASD 方程式という非線型偏微分方程式の解なのだから、これは、かなり驚くべき存在定理である。(ただし、正確には、タウベス [4] は自己双対接続の方を扱っている。近年では、反自己双対接続を調べるのが通常であると思われるため、この講演では反自己双対の方を考える。むしろ、多様体の向きを逆にすることで両者は入れ替わるので、本質的には等価である。)

この講演の目的は、上記のタウベスの定理 (の一つのアナロジー) が一般の非コンパクト 4次元多様体に対しては成立しないことを紹介することである。

CP^2 を複素射影平面とする。 CP^2 の (整数で添え字付けした) 無限個のコピーの連結和を

$$(CP^2)^{\#Z} := \dots \# CP^2 \# CP^2 \# CP^2 \# \dots$$

とする。(この無限連結和の正確な定義は次の節を参照。) $(CP^2)^{\#Z}$ は非コンパクト 4次元多様体である。

定理 1. $(CP^2)^{\#Z}$ 上の完備リーマン計量 g であって、以下の主張を成立させるものが存在する： E を $(CP^2)^{\#Z}$ 上の任意の主 $SU(2)$ 束としよう。もし A が E 上の g -ASD 接続であって、

$$(1) \quad \int_{(CP^2)^{\#Z}} |F_A|_g^2 d\text{vol}_g < +\infty$$

*Supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (B) (21740048).

ならば、 A は平坦である ($F_A = 0$)。ここで、 F_A は A の曲率であり、 A が g -ASDであるとは、 $*_g F_A = -F_A$ となることとする。($*_g$ は g に関するホッジスター。) また、 $|\cdot|_g$ と $d\text{vol}_g$ は g についてのノルムと体積形式である。

つまり、 $((\mathbb{C}P^2)^{\#Z}, g)$ は非平坦なインスタントンを持たないということである。これは、私が知る限りにおいて、非平坦なインスタントンを許容しない向き付き4次元リーマン多様体の初めての例である。

注意 2. 上の有限エネルギー条件 (1) を外して、無限エネルギーの ASD 接続も含めて考えるとどうなるのかは大変興味深い問題である。つまり、無限エネルギーのものも含めて、非平坦な ASD 接続を一切許容しない向き付き4次元リーマン多様体は存在するか？これは、私が知る限り、未解決の問題である。無限エネルギー ASD 接続と、その無限次元モジュライ空間については論文 [3, 5, 6] において研究を行っている。

証明のナイーブなアイデアを紹介したい。 g を $(\mathbb{C}P^2)^{\#Z}$ 上のリーマン計量とし、 n を0以上の整数とする。 $(\mathbb{C}P^2)^{\#Z}$ 上の $SU(2)$ g -ASD 接続 A であって、

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{(\mathbb{C}P^2)^{\#Z}} |F_A|_g^2 d\text{vol}_g = n$$

を満たすもの全体のなすモジュライ空間を $M(n, g)$ とする。 $M(n, g)$ の仮想次元がどうなるかを考えよう。 $b_1((\mathbb{C}P^2)^{\#Z}) = 0$ であり、さらに、形式的には $b_+((\mathbb{C}P^2)^{\#Z}) = +\infty$ と考えることが出来る。 $(b_+$ は交差形式の正の固有値の個数。)そこで、通常仮想次元公式 (ドナルドソン-クロンハイマー [1, Section 4.2.5] を参照) を形式的に適用してみると、

$$\dim M(n, g) = 8n - 3(1 - b_1((\mathbb{C}P^2)^{\#Z}) + b_+((\mathbb{C}P^2)^{\#Z})) = -\infty$$

となる。これより、ナイーブには、もし $M(n, g)$ に対する横断正則性が成立していれば、 $M(n, g)$ は空集合になるであろうと思われる。この観察とフリード・ウーレンベック [2] の metric perturbation の議論を合わせることで、次のことが予想される： $n \geq 1$ の時、リーマン計量 g をジェネリックに取れば、 $M(n, g)$ は空集合になるであろう。 $(M(0, g)$ は平坦 $SU(2)$ 接続の成すモジュライ空間であって、計量に依存しない。)

2 無限連結和

この節では、無限連結和の構成法を厳密に述べ、定理1よりも精密かつ一般的な主張を定式化する。 Y を単連結、コンパクト、向き付き4次元多様体とする。 $x_1, x_2 \in Y$ を相異なる2点とし、 $\hat{Y} := Y \setminus \{x_1, x_2\}$ とおく。 \hat{Y} 上のリーマン計量 h を、エンド (すなわち、 x_1, x_2 の「周り」) でシリンダー型になるよう取る。これは、

正確には次のことを意味する：コンパクト集合 $K \subset \hat{Y}$ が存在し、 $\hat{Y} \setminus K = Y_- \sqcup Y_+$ であって、 $Y_- = (-\infty, -1) \times S^3$ かつ $Y_+ = (1, +\infty) \times S^3$ となる。ここで、“=” は向きを保つ等長写像が与えられていることを意味する。さらに、滑らかな固有写像 $p : \hat{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ であって、次の条件を満たすものが存在することも仮定する： $p(K) = [-1, 1]$ 。 p は $Y_- = (-\infty, -1) \times S^3$ 上で $(-\infty, -1)$ への射影と一致し、 $Y_+ = (1, +\infty) \times S^3$ 上では $(1, +\infty)$ への射影と一致する。

\hat{Y}_n を \hat{Y} のコピーとする ($n \in \mathbb{Z}$)。また、 $p_n : \hat{Y}_n \rightarrow \mathbb{R}$ を $p : \hat{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ のコピーとする。 $T > 2$ を取る。無限連結和 $X = Y^{\# \mathbb{Z}}$ を次で定めよう：

$$X := \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} p_n^{-1}(-T+1, T-1) \right) / \sim.$$

ただし、我々は $p_n^{-1}(1, T-1)$ と $p_{n+1}^{-1}(-T+1, -1)$ とを次のように同一視する：

$$\begin{aligned} p_n^{-1}(1, T-1) &= (1, T-1) \times S^3 \ni (t, \theta) \\ &\sim (t-T, \theta) \in (-T+1, -1) \times S^3 = p_{n+1}^{-1}(-T+1, -1). \end{aligned}$$

この同一視は向きと計量を保つ。従って、 $X = Y^{\# \mathbb{Z}}$ 上には向きが自然に入り、また X は周期的なリーマン計量 g_0 を持つ。 g_0 は各ピース $p_n^{-1}(-T+1, T-1)$ 上では計量 h (のコピー) と一致する。ここで、 g_0 は上で導入したパラメータ T に依存していることに注意せよ。

定理 1 は次の定理から従う。

定理 3. $b_-(Y) = 0$ と $b_+(Y) \geq 1$ を仮定する。もし、 T が十分大きいならば、 $X = Y^{\# \mathbb{Z}}$ 上の完備リーマン計量 g で、次の二つの条件を満たすものが存在する。

- (i) あるコンパクト集合の外で、 g は周期的計量 g_0 と一致する。
- (ii) E を X 上の任意の主 $SU(2)$ 束とする。もし A が E 上の g -ASD 接続であって、

$$\int_X |F_A|_g^2 d\text{vol}_g < +\infty$$

ならば、 A は平坦である。

3 定理 3 の証明のアイデア

定理 3 の証明のアイデアを技術的細部を無視して説明したい。(厳密な証明については論文 [7] を参照。)

まず X は非コンパクトなので、 X 上の主 $SU(2)$ 束は全て直積束 $E = X \times SU(2)$ に同型であることに注意する。 g を X 上のリーマン計量であって、あるコンパクト集合の外で g_0 と一致するものとする。この時、もし A が E 上の g -ASD 接続であって、 $\int_X |F_A|_g^2 d\text{vol}_g < \infty$ ならば、 $\frac{1}{8\pi^2} \int_X |F_A|_g^2 d\text{vol}_g$ は整数になることが示せる。そこで、各整数 $n \geq 0$ に対して、 E 上の g -ASD 接続 A であって $\frac{1}{8\pi^2} \int_X |F_A|_g^2 d\text{vol}_g = n$

を満たすもの全体のなすモジュライ空間を $M(n, g)$ とおく. $[A] \in M(n, g)$ を取る. $[A]$ の周りの様子を調べたい.

$D_A := -d_A^* + d_A^{+g} : \Omega^1(\text{ad}E) \rightarrow (\Omega^0 \oplus \Omega^{+g})(\text{ad}E)$ とする. ここで, d_A^* は $d_A : \Omega^0(\text{ad}E) \rightarrow \Omega^1(\text{ad}E)$ の形式的共役であり, d_A^{+g} は $d_A : \Omega^1(\text{ad}E) \rightarrow \Omega^2(\text{ad}E)$ の g -自己双対部分である. (正しくは, 適切な重み付きソボレフ空間を使う必要があり, その重みに応じて D_A の定義を修正する必要がある. ここではこれらの点を無視する.) d_A^{+g} は ASD 方程式の A での線型化作用素であり, d_A^* はクーロンゲージ条件を表す作用素である. 従って, D_A を調べることで, $M(n, g)$ の $[A]$ 近傍の情報が得られることが期待出来る. 定理 3 の証明の最も重要な点は, D_A に関する次の三つの主張を証明することにある.

- (i) $\text{Ker}D_A$ は有限次元.
- (ii) $\text{Im}D_A$ は $(\Omega^0 \oplus \Omega^{+g})(\text{ad}E)$ 内で閉.
- (iii) $\text{Coker}D_A$ は無限次元.

すると, 倉西の手法によって, 写像

$$f : \text{Ker}D_A \rightarrow \text{Coker}D_A$$

が存在して, f のゼロ点集合が $M(n, g)$ の $[A]$ 近傍のモデルを与える. (正確には, f は原点近傍でのみ定義されている.) 上の条件 (i), (iii) より, f は有限次元空間から無限次元空間への写像である. 従って, 少し摂動を加えれば, ゼロ点が消滅するであろうと予測出来る.

以上の考察と, フリード・ウーレンベック [2] の metric perturbation の議論を合わせることで, $n \geq 1$ の時, 計量 g をジェネリックにとると, $M(n, g)$ は空集合になることが証明出来る. (この書き方は不正確であり, 厳密性を欠いている. 正確なことは論文 [7] を参照してほしい.)

参考文献

- [1] S.K. Donaldson, P.B. Kronheimer, The geometry of four-manifolds, Oxford University Press, New York (1990)
- [2] D.S. Freed, K.K. Uhlenbeck, Instantons and four-manifolds, Second edition, Springer-Verlag, New York (1991)
- [3] S. Matsuo, M. Tsukamoto, Instanton approximation, periodic ASD connections, and mean dimension, preprint, arXiv: 0909.1141
- [4] C.H. Taubes, Self-dual connections on 4-manifolds with indefinite intersection matrix, J. Differential Geom. **19** (1984) 517-560
- [5] M. Tsukamoto, Gluing an infinite number of instantons, Nagoya Math. J. **192** (2008) 27-58

- [6] M. Tsukamoto, Gauge theory on infinite connected sum and mean dimension, *Math. Phys. Anal. Geom.* **12** (2009) 325-380
- [7] M. Tsukamoto, An open four-manifold having no instanton, preprint, [arXiv:1004.3394](https://arxiv.org/abs/1004.3394)

Hilbert 級数による漸近的 Chow 不安定な Kähler-Einstein 多様体の示し方

四ツ谷 直仁 (名古屋大学多元数理研究科)

概要

本講演では, GIT 安定性の中の一つ漸近的 Chow 安定性をとりあげ, その障害を計算する事を目的とする. 事実, 漸近的 Chow 半安定性には障害が存在する事が既に知られており [5, 3], さらに [4] によりトーリックファノ多様体上においては組み合わせ論的手法により計算が実行可能である事が示された¹. この手法を応用する事で, 7次元 Kähler-Einstein トーリック・ファノ多様体で漸近的 Chow 半安定でない例の存在を示す事ができる. 本講演の結果は, 小野肇氏 (東京理科大学), 佐野友二氏 (九州大学) との共同研究 [10] に基づく.

1 Introduction

(V, L) が偏極多様体であるとは, V が n 次元コンパクト複素多様体であり, L が V 上豊富な正則直線束となっているものをいう. この時 V は $c_1(L)$ を Kähler 類とする Kähler 多様体となり, $c_1(L)$ に標準計量 (Kähler-Einstein 計量, より一般には定スカラー曲率 Kähler (cscK) 計量) が存在するための必要十分条件について, 今現在様々な研究者達により盛んな研究が行われている. その必要十分条件については次の予想が有名である.

予想 1.1 (Donaldson-Tian-Yau 予想). 偏極多様体 (V, L) において $c_1(L)$ に cscK 計量が存在する事と, (V, L) が代数多様体としてある種の GIT (Geometric Invariant Theory) の意味での安定性を満たす事は同値であろう.

現段階で K -polystability がその最有力候補であり, その必要性については [7, 11] により示されている. 一方, 今回の主題である漸近的 Chow 安定性については, Donaldson による次の様な結果がある [2].

定理 1.2 (Donaldson 2001). (V, L) を偏極多様体とする. $\text{Aut}(V, L) := \text{Aut}(L)/\mathbb{C}^\times$ が離散的とすると, V が $c_1(L)$ に cscK を持つならば (V, L) は漸近的 Chow 安定となる.

この結果は, $\text{Aut}(V, L)$ が離散的でない場合に満洲氏により次の様な形に拡張された [6].

定理 1.3 (Mabuchi 2005). (V, L) を偏極多様体とし, [5] において定義された “ある積分不変量 \mathcal{F} ” が消滅しているとする. この仮定の下, もし V が $c_1(L)$ に cscK を持てば (V, L) 漸近的 Chow polystable になる.

$\text{Aut}(V, L)$ が離散的でない場合, 固定部分群が有限とは限らない為, この場合, (V, L) は漸近的 Chow polystable となる. 次節以降これらの用語の定義を振り返る.

前述の Donaldson-Tian-Yau 予想, 及び 2001 年の Donaldson の結果からみても, 上の「ある積分不変量 \mathcal{F} の消滅」という仮定が外せるのではないかという期待ができる. この積分不変量 \mathcal{F} は, 漸近的 Chow 半安定性の為の障害となる事が示され [5], その後に二木氏によって再定式化された [3]. これに対し我々の得た結果は次の通りである.

¹この結果は, 小野肇氏によりファノではない偏極トーリック多様体にも拡張されている [9].

定理 1.4 (Ono-Sano-Y. 2009). 複素 7 次元トーリック・ファノ多様体 V で $c_1(L)$ に $cscK$ を持つが漸近的 Chow 半安定ではない (即ち, 漸近的 Chow 不安定な) ものが存在する. 特にファノ多様体である事から $L = K_V^{-1}$: 反標準直線束であり, この場合の $cscK$ 計量は KE 計量に他ならない.

これは冒頭にふれた GIT 安定性の中でも特殊計量をもつが半安定性を満たさない初めての例になる. 従って, 定理 1.3 において仮定されている「ある積分不変量 \mathcal{F} の消滅」というのは, $cscK$ 計量の存在から自然に満たされるものではない本質的なものである事がわかる. さらに定理 1.2 の結果を $\text{Aut}(V, L)$ が離散的でない場合へ一般化する事ができない事も従う.

2 漸近的 Chow 安定性

(V, L) を $\dim_{\mathbb{C}} V = n$ を満たす偏極多様体とする. L は豊富な正則直線束である事から, 十分大きな $k \in \mathbb{N}$ に対し, L^k は非常に豊富となる. 従って, L^k の切断を用いて小平埋め込み $\Phi_k : V \rightarrow \mathbb{P}(W_k)$ が定まる. 但し, $W_k := H^0(V, L^k)^*$ とする. $\mathbb{P}(W_k^*)$ の元は $\mathbb{P}(W_k)$ の超平面の線形定義方程式の係数と同一視する事が出来るので, $n+1$ 個の直積 $\mathbb{P}(W_k^*) \times \cdots \times \mathbb{P}(W_k^*)$ は $\mathbb{P}(W_k)$ の $n+1$ 枚の超平面 H_1, \dots, H_{n+1} を定める. ここで d_k を $\Phi_k(V)$ の次数 (即ち, $\Phi_k(V)$ の generic な n 枚の超平面切断によって d_k 個の交点が得られるもの) とする. この時,

$$X_{\Phi_k(V)} = \{(H_1, \dots, H_{n+1}) \in \mathbb{P}(W_k^*)^{n+1} \mid H_1 \cap \cdots \cap H_{n+1} \cap (\Phi_k(V)) \neq \emptyset\}$$

は, $\mathbb{P}(W_k^*)^{n+1}$ の因子となる事が従う. よって定数倍を法として, その定義多項式 $f_{\Phi_k(V)} \in (\text{Sym}^{d_k}(W_k))^{\otimes(n+1)}$ が定まる. 特に $[f_{\Phi_k(V)}] \in \mathbb{P}(\text{Sym}^{d_k}(W_k))^{\otimes(n+1)}$ を **Chow 点** という.

定義 2.1. $S_k := SL(W_k, \mathbb{C})$ とし, $(\text{Sym}^{d_k}(W_k))^{\otimes(n+1)}$ への自然なベクトル空間としての作用を考える. この時 $\Phi_k(V)$ が *Chow(半)安定* とはそれぞれ,²

- **Chow 安定** \iff 軌道 $S_k \cdot f_{\Phi_k(V)}$ が閉, かつ $f_{\Phi_k(V)}$ の固定部分群が有限
- **Chow 半安定** \iff $S_k \cdot f_{\Phi_k(V)}$ の閉包が原点を含まない

時をいう. 特に *Hilbert-Mumford* 判定法により, $\Phi_k(V)$ の *Chow 安定性* は S_k の 1-parameter 部分群の作用に関する *Chow 安定性* に帰着する. また, ある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$k \geq k_0 \implies \Phi_k(V) \text{ は Chow (半) 安定}$$

となる時, (V, L) は **漸近的に Chow(半) 安定** という.

特に $\text{Aut}(V, L)$ が離散的でない時は, $f_{\Phi_k(V)}$ の固定部分群が有限とは限らない. 従って $S_k \cdot f_{\Phi_k(V)}$ が閉軌道の時 **Chow polystable** という事とする. (漸近的 Chow polistability も同様とする).

この節では漸近的 Chow 半安定の障害として二木氏により再定式化されたもの [3] を用いる.

(V, L) を上述のものとし, Td^p ($1 \leq p \leq n$) を p 次 Todd 多項式, $\mathfrak{h}(V)$ を V 上正則ベクトル場全体のなす Lie 環とする. この時,

$$\mathfrak{h}_0(V) := \{X \in \mathfrak{h}(V) \mid \text{Zero}(X) \neq \emptyset\}$$

とすると, $\mathfrak{h}_0(V)$ は $\text{Aut}(V, L)$ の Lie 環と一致する事がいえる. P を正則接束の枠束, θ を P の $(1, 0)$ 型接続, また $\Theta = \bar{\partial}\theta$ をその曲率形式とする. $X \in \mathfrak{h}_0(V)$ に対し, Lie 微分 \mathcal{L}_X , 共変微分 ∇_X を用いて, $L(X) := \nabla_X - \mathcal{L}_X$ を

²流儀は違うが基調講演の小野肇氏のものと同質的なものになる.

定義しさらに, Kähler 形式 $\omega \in c_1(L)$ に関する X の Hamiltonian 関数 u_X を,

$$\int_V u_X \omega^n = 0$$

により正規化する. この時, 写像 $\mathcal{F}_{Td^p} : \mathfrak{h}_0(V) \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\mathcal{F}_{Td^p}(X) = (n-p+1) \int_V Td^p(\Theta) \wedge u_X \omega^{n-p} + \int_V Td^p(L(X) + \Theta) \wedge \omega^{n-p+1}$$

により定めると, これは $c_1(L)$ の代表元 ω と接続 θ の取り方によらない事がいえ, さらに次の事実が成立する³.

定理 2.2 (Futaki 2004). (V, L) が漸近的 Chow 半安定ならば, 全ての $1 \leq p \leq n$ に対し

$$\mathcal{F}_{Td^p} = 0 \quad (1 \leq p \leq n) \quad (1)$$

となる. 特に上の条件 (1) は定理 1.3 における仮定「ある積分不変量 \mathcal{F} の消滅」と同値.

3 二木-小野-佐野の定理

本節ではタイトルに取り上げられている Hilbert 級数を導入する. [4] において, トーリックファノ多様体上では漸近的 Chow 安定性の障害 \mathcal{F}_{Td^p} が Hilbert 級数の微分に帰着される事が明らかになった. 以下この事を見る.

V を n 次元トーリックファノ多様体とし, K_V を標準直線束とする. V がトーリック多様体であることからトーリック構造を定める実トーラス作用 $(S^1)^n = T^n$ が存在する⁴が, このリフトによる作用とファイバー部分への S^1 作用により K_V には T^{n+1} -作用が誘導される. 従って K_V もトーリック (アファイン代数多様体) になる. 一方 K_V の $U(1)$ 束の全空間 S は regular な Reeb 場をもつ佐々木多様体になり, その Riemannian 錐 $(C(S), \bar{g}) = (\mathbb{R}_{>0} \times S, dr^2 + r^2 g)$ は $K_V \setminus \{\text{zero section}\}$ である事が従う. 但し g は S の Riemann 計量, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ とする. 従って前述の T^{n+1} 作用は $C(S)$ にトーリック多様体の構造を与え, $C(S)$ はトーリック Kähler 多様体になる. そのモーメント写像の像を \mathcal{C}^* で表わすものとする.

定義 3.1. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n+1})$, $\mathbb{Z}^{n+1} \ni \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n+1})$ に対し, $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \cdots x_{n+1}^{a_{n+1}}$ とする時, 有理凸多面錐 $\mathcal{C}^* \subset \mathbb{R}^{n+1}$ に対する級数

$$C(\mathbf{x}, \mathcal{C}^*) := \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{C}^* \cap \mathbb{Z}^{n+1}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}}$$

を \mathcal{C}^* の Hilbert 級数という.

今 n 次元トーリックファノ多様体 V を定める扇 $\Sigma_V \subset \mathbb{Z}^n$ に対し,

$$\Sigma_V(k) := \{\sigma \in \Sigma_V \mid \dim \sigma = k\}, \quad G_V := \{\sigma \in \mathbb{Z}^n \mid \sigma \in \Sigma(1) \text{ は原始元}^5\}$$

とし, 整凸多面体 $Q_V := \text{conv}(G_V) \subset \mathbb{R}^n$ を定める. Q_V の頂点を \mathbf{v}_i で表わすものとする (以降 Q_V を Fano polytope と呼ぶ). Q_V の極双対多面体 $P := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{v}_i, w \rangle \geq -1\}$ を考えると, これは (V, K_V^{-1}) の Delzant polytope となる. 特に $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ を Delzant polytope P の頂点とすると, $\mu_j = (\mathbf{w}_j, 1) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ を用いて, $\mathcal{C}^* = \{c_1 \mu_1 + \cdots + c_k \mu_k \mid c_i \geq 0, i = 1, \dots, k\}$ と表わせる. この時, 次が成立する.

³ここで \mathcal{F}_{Td^1} は cscK の障害である (通常の) 二木不変量と一致する.

⁴このトーラス作用 T^n は V の自己同型群に含まれる極大トーラスと一致する事が言える (Demazure の定理).

⁵ \mathbb{Z}^n の元 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ が原始元とは $\gcd(a_1, \dots, a_n) = 1$ を満たす時をいう.

命題 3.2 (Futaki-Ono-Sano[4]). Hilbert 級数 $C(\mathbf{x}, C^*)$ は有理関数として表わせる. 特に *Delzant polytope* の各頂点 \mathbf{w}_j を始点とする原始的生成元 $\mathbf{e}_{j,1}, \dots, \mathbf{e}_{j,n}$ と $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_n)$ を用いて, 次の形で表わせる⁶.

$$C(\mathbf{x}, C^*) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{1 - \mathbf{x}^{\mu_j}} \prod_{b=1}^m \frac{1}{(1 - \tilde{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_{j,b}})}. \quad (2)$$

今 $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ に対し, 有理凸多面体を $C_R := \{\xi \in \text{Int } C \mid \xi = (\mathbf{c}, n+1)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ によって定める⁷. 但し, $\text{Int } C$ で C^* の双対錐 C の内部を表わすものとする. この C_R の元 $\xi \in C_R$ に対し, $\mathbf{e}^{-t\xi} = (e^{-c_1 t}, \dots, e^{-c_n t}, e^{-(n+1)t})$ と置く事で, 任意の $\mathbf{a} \in C^*$ に対し $\langle \mathbf{a}, \xi \rangle \in \mathbb{R}_{>0}^{n+1}$ となり, $C(\mathbf{e}^{-t\xi}, C^*) = \sum_{\mathbf{a} \in C^* \cap \mathbb{Z}^{n+1}} e^{-t\langle \mathbf{a}, \xi \rangle}$ は実際収束する事が従う. $\xi \in C_R$ を固定し, $t = 0$ での $C(\mathbf{e}^{-t\xi}, C^*)$ の Laurent 展開

$$C(\mathbf{e}^{-t\xi}, C^*) = \frac{C_{-n-1}(\mathbf{c})}{t^{n+1}} + \frac{C_{-n}(\mathbf{c})}{t^n} + \dots$$

を考える. $C_i(\mathbf{c})$ の $\mathbf{c} = (0, \dots, 0)$ における第一変分 $\{d_0 C_i(\mathbf{c})\}$ をとると, \mathcal{F}_{Tdp} の一次関係に関する情報が求められる事が [4] により明らかになった.

定理 3.3 (Futaki-Ono-Sano 2008). Lie 環 $\mathfrak{t} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^n$ 内において $\{\mathcal{F}_{Tdp}\}_{1 \leq p \leq n}$ が張る線形空間と $\{d_0 C_i(\mathbf{c})\}_{i=-(n+1), -n, \dots}$ の張る線形空間は等しい. 但し, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T^n) \cong \mathbb{R}^n$ とする.

4 Symmetric Toric Fano variety

この節では, 命題 3.2 及び定理 3.3 を用いて Nonsymmetric toric Fano variety (非対称トーリックファノ多様体) の積分不変量を計算する事を目的とする. これには Batyrev-Selivanova[1] 及び Nill-Paffenholz[8] の結果が大いに関わる.

V を n 次元トーリックファノ多様体とし, $\text{Aut}(V)$ を V の自己同型群とする. Demazure の構造定理より $\text{Aut}(V)$ には, トーリック構造を定めるトーラスが極大トーラスとして含まれている. このトーラスに関する Weyl 群を $\mathcal{W}(V)$ とした時, $\mathcal{W}(V)$ は Fano polytope Q_V を保つ $GL(n, \mathbb{R})$ の元から生成される有限部分群となる [1]. $\mathfrak{t} := \text{Lie}(T^n)$ とした時, $\mathcal{W}(V)$ が $\mathfrak{t} \cong \mathbb{R}^n$ に定める自然な作用によって不変な部分空間 $\mathfrak{t}^{\mathcal{W}(V)}$ を考える事ができる. 特に $\dim \mathfrak{t}^{\mathcal{W}(V)} = 0$ の時トーリックファノ多様体は **対称**, そうでない時 **非対称** という事にする.

定理 4.1 (Batyrev-selivanova99[1]). 対称なトーリックファノ多様体は *Kähler-Einstein* 計量をもつ.

この逆の主張, 即ち「全ての *Kähler-Einstein* トーリックファノ多様体は対称か?」という自然な問いが生まれるが約 10 年の時を経てこの問題は否定的に解決された [8].

定理 4.2 (Nill-Paffenholz 2009). 7 次元以上では非対称 *Kähler-Einstein* トーリックファノ多様体が存在する.

その内の一つは $(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)^3 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^3$ 上の $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ 束として与えられ, 対応する Delzant polytope の頂点 \mathbf{w}_j は 64 個となり Hilbert 級数を命題 3.2 の (2) を使って実際計算するには, 膨大な計算量となり困難が生じる⁸. そこで今の場合, $\dim \mathfrak{t}^{\mathcal{W}(V)} = 1$ より積分不変量が張る空間次元が高々 1 で有る事により⁹, 次の様な工夫をする.

⁶証明にあたっては Brion の公式が本質的; M. Brion, Points entiers dans les polyédres convexes, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 21, 1988, 653-663.

⁷ C_R は $C(S)$ の moment 写像の像 C^* を保ち, 佐々木-Einstein であるための必要条件を満たす Reeb ベクトル場の変形空間に等しく, 特に K_V の $U(1)$ 束の全空間として得られる regular な佐々木多様体に対する Reeb 場は $(0, \dots, 0, n+1)$ で与えられる.

⁸実際は局所化公式による \mathcal{F}_{Tdp} の直接計算と Hilbert 級数側双方の計算を行った. また原始的生成元 $\{\mathbf{e}_{j,b}\}_{1 \leq j \leq 64, 1 \leq b \leq 7}$ を求める上で, $(\mathbb{C}\mathbb{P}^3) \times (\mathbb{C}\mathbb{P}^1)^4$ と Fano polytope の combinatorial type が同じ (primitive relation による) 事に帰着している.

⁹実際, 一般に積分不変量の張る線形空間は $\mathfrak{t}^{\mathcal{W}(V)}$ の部分空間となる.

命題 4.3. 全ての $1 \leq p \leq n$ に対し, $\mathcal{F}_{Td^p} = 0$ とすると, 任意の $\mathbb{Z}_{>0}^n$ の元 (m_1, \dots, m_n) に対し,

$$\frac{\partial}{\partial x} C(x^{m_1}, \dots, x^{m_n}, e^{-(n+1)t})|_{x=1} = 0 \quad (3)$$

が成立する.

この結果, 積分不変量が消滅しない事を示すためには適当な $\mathbb{Z}_{>0}$ の元 (m_1, \dots, m_n) で (3) が消えないものが見つければよい. さらに 1-parameter に落とした事で計算機の実行が可能となる. 特に $(m_1, \dots, m_7) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ に対しては,

$$\frac{\partial}{\partial x} C(x^{n_1}, \dots, x^{n_7}, e^{-8t})|_{x=1} = -\frac{184e^{-8t}(2e^{-32t} + 31e^{-24t} + 70e^{-16t} + 31e^{-8t} + 2)}{(-1 + e^{-8t})^7} \neq 0$$

となり Hilbert 級数の微分が消滅しない事が示せる. 従って定理 3.3 により求める結果, 定理 1.4 を得る.

参考文献

- [1] V. V. Batyrev and E. N. Selivanova, Einstein-Kähler metrics on symmetric toric Fano manifolds, J. Reine Angew. Math. 512 (1999) 225–236.
- [2] S. K. Donaldson, Scalar curvature and projective embeddings. I, J. Differential Geom. 59, no.3 (2001) 479–522.
- [3] A. Futaki, Asymptotic Chow semi-stability and integral invariants., Internat. J. Math. 15, no.9 (2004) 967–979.
- [4] A. Futaki, H. Ono and Y. Sano, Hilbert series and obstructions to asymptotic semistability, arXiv:0811.1315 (2008). to appear in Advances in Math.
- [5] T. Mabuchi, An obstruction to asymptotic semistability and approximate critical metrics, Osaka J. Math. 41, no.2 (2004) 463–472.
- [6] T. Mabuchi, An energy-theoretic approach to the Hitchin-Kobayashi correspondence for manifolds. I, Invent. Math. 159, no.2 (2005) 225–243.
- [7] T. Mabuchi, K -stability of constant scalar curvature polarization, arXiv:0812.4093.
- [8] B. Nill and A. Paffenholz, Examples of non-symmetric Kähler-Einstein toric Fano manifolds, arXiv:0905.2054.
- [9] H. Ono, A necessary condition for Chow semistability of polarized toric manifolds, arXiv:0905.2054.
- [10] H. Ono, Y. Sano and N. Yotsutani, An example of asymptotically Chow unstable manifolds with constant scalar curvature. arXiv:0906.3836.
- [11] J. Stoppa, K -stability of constant scalar curvature Kähler manifolds, arXiv:0803.4095.

波動方程式と LeBrun-Mason 対応について

中田 文憲 (東京理科大)

1 はじめに

C. LeBrun と L. J. Mason により, **正則円板**を用いた新しいタイプのツイスター理論が発見され, 研究が行なわれている. 本稿では, $S^2 \times S^2$ 上の **Tod-鎌田計量**と呼ばれる不定値自己双対計量が, この理論の枠組みにのることを概説する. 主な内容は以下の二つである:

【I】 三次元ドジッター空間上の**波動方程式**および**モノポール方程式**の解が, **積分変換**を介して S^2 上の関数と 1 対 1 に対応することを示す.

【II】 I の対応を用いて, Tod-鎌田計量に対する LeBrun-Mason 対応を具体的に記述する.

上記【I】の結果は, ツイスター対応とは無関係に記述・証明されるが, これはツイスター対応の研究の中で見出されたものであり, ツイスター対応なしに見出すことは容易でない内容であると考えられる. この意味で, 【I】の結果は LeBrun-Mason 理論の「応用」であると位置づけることができる.

2 波動方程式と積分変換

この節では, 【I】の内容について概説する.

ドジッター空間 三次元ドジッター空間 $(S_1^3, g_{S_1^3})$ は次で定まる不定値定曲率空間である:

$$S_1^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$
$$g_{S_1^3} = (-dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)|_{S_1^3}.$$

以下では次の同一視 $\mathbb{R} \times S^2 \cong S_1^3$ を用いる:

$$\mathbb{R} \times S^2 \ni (t, y) \longleftrightarrow (\sinh t, \cosh t \cdot y) \in S_1^3 \quad \left(\begin{array}{l} y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 \end{array} \right).$$

波動方程式 ドジッター空間上の**波動方程式**は次で与えられる:

$$\square V := *d * dV = 0 \tag{2.1}$$

ドジッター計量 $g_{S_1^3}$ の符号が $(-+++)$ であることから, (2.1) は双曲型方程式となる. この方程式の解は一般に複素数値で微分可能性の低いものも許容するが, 以下では C^∞ 級・実数値の解を考える.

モノポール方程式 ドジッター空間 S_1^3 上の関数 $V \in C^\infty(S_1^3)$ と 1-form $A \in \Omega^1(S_1^3)$ の組 (V, A) は, 以下の方程式をみたすとき, **モノポール**と呼ばれる¹:

$$*dV = dA. \quad (2.2)$$

(V, A) がモノポールであるとき, V は波動方程式の解となる.

小円の空間 ドジッター空間 $S_1^3 \simeq \mathbb{R} \times S^2$ の各点 (t, y) に対して, 単位球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上の領域 $\Omega_{(t,y)}$ を次で定める: $\Omega_{(t,y)} = \{u \in S^2 \mid u \cdot y > \tanh t\}$.

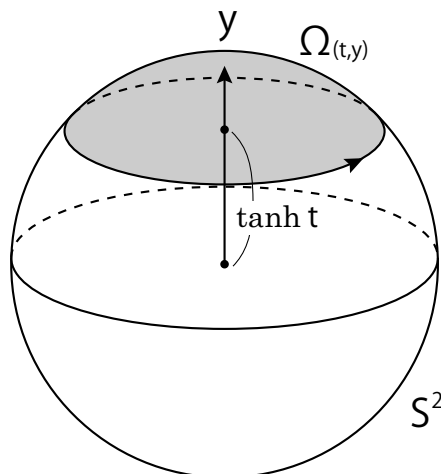


Figure 1: domain $\Omega_{(t,y)}$

対応 $(t, y) \leftrightarrow \Omega_{(t,y)}$ により, ドジッター空間 S_1^3 は S^2 上の小円で囲まれる領域の空間, あるいは S^2 上の向きつき小円の空間と同一視される. 特に $t = 0$ のとき $\partial\Omega_{(0,y)}$ は大円となる.

上記の対応は LeBrun-Mason 対応に動機付けられて自然に得られる対応であり, ドジッター空間の幾何と相性が良いものになっているが, 本稿ではその詳細は省略する.

積分変換 上記の対応 $(t, y) \leftrightarrow \Omega_{(t,y)}$ を用いて二つの積分変換 $R, Q : C^\infty(S^2) \rightarrow C^\infty(S_1^3)$ を以下により定義する:

$$Rh(t, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega_{(t,y)}} h dS^1 \quad (dS^1 \text{ は } \partial\Omega_{(t,y)} \text{ 上の全長 } 2\pi \text{ となる測度}),$$

$$Qh(t, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_{(t,y)}} h dS^2 \quad (dS^2 \text{ は単位球面 } S^2 \text{ 上の面積要素}).$$

なお $Rh(t, y)$ に $t = 0$ を代入すると変換 $C^\infty(S^2) \rightarrow C^\infty(S^2) : h \mapsto Rh(0, \cdot)$ を得るが, これは大円での積分であり, **球面上の Radon 変換** または **Funk 変換** と呼ばれ, 古くから研究されている積分変換である [1].

波動方程式の解 以下では, 波動方程式の解 $V \in C^\infty(S_1^3)$ に以下の条件を課す:

$$(\#) \quad V(t, y) \rightarrow 0, \quad V_t(t, y) \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \pm\infty \quad (y \text{ に関して一様収束}).$$

¹正確には, これは「abelian でねじれないモノポール」である.

また, 次の関数空間を設定する:

$$C_*^\infty(S^2) := \left\{ h \in C^\infty(S^2) \mid \int_{S^2} h dS^2 = 0 \right\}.$$

以上の記号のもと, 波動方程式 (2.1) に関する次の結果が示される.

Theorem 2.1 (N.[6]). 任意の $h \in C_*^\infty(S^2)$ に対し, $V = Qh$ は (#) および $\square V = 0$ をみたす. 逆に (#) をみたす $\square V = 0$ の解 $V \in C^\infty(S_1^3)$ は, 唯一の $h \in C_*^\infty(S^2)$ によって $V = Qh$ と書かれる.

上の定理は, 積分変換 Q を通して, 関数 $h \in C^\infty(S^2)$ と波動方程式の解 $V \in C^\infty(S_1^3)$ であって (#) をみたすものが 1 対 1 に対応することを意味しており, これが後述のツイスター対応に由来する対応になっている.

モノポール解 モノポール解についても, Theorem 2.1 と類似の 1 対 1 対応が, 以下のようにならされる.

Definition 2.2. モノポール (V, A) と (V', A') は $V = V'$ かつ, $A = A' + d\phi$ となる関数 ϕ が存在するとき, **ゲージ同値**であるという.

Theorem 2.3 (N.[6]). 次の二つの対象は 1 対 1 に対応する:

- 関数 $h \in C_*^\infty(S^2)$,
- 条件 (#) をみたす S_1^3 上のモノポール (V, A) のゲージ同値類.

対応は次式で与えられる:

$$V = -Q\Delta_{S^2}h, \quad A = -\check{*}dRh. \quad (2.3)$$

ただし Δ_{S^2} は S^2 上のラプラシアン, $\check{*}$ と \check{d} はそれぞれ $S_1^3 \cong \mathbb{R} \times S^2$ の S^2 方向の Hodge 作用素と外微分である.

3 LeBrun-Mason 対応

LeBrun-Mason 型の対応は現在のところ三種類が知られているが [3, 4, 5], 本稿ではそのうち最も典型的といえる **自己双対共形構造**に関する LeBrun-Mason 対応について紹介し, 前節の結果を踏まえ, 主結果【II】について説明する.

自己双対共形構造 M を四次元多様体, g をその上の (不定値かもしれない) 計量とする. g が不定値の場合であっても, g のリーマン曲率 R や Weyl 曲率 W は正定値の場合と同様に定義することができる. さらに, g の符号が正定値またはニュートラル (すなわち符号 $(- - ++)$ のとき) には, W は自己双対部分 W_+ と, 反自己双対部分 W_- に分解し, $W_- \equiv 0$ のとき, g は **自己双対**であるという. W および W_\pm は g の共形類のみで定まるため, 共形構造 $[g]$ についても同様に自己双対性を定義できる.

Zollfrei 条件 正定値の場合の類似としてニュートラル計量に関するツイスター理論の成立を期待することは自然であるが, 「意味のある」理論を構築するのは実は容易でない. LeBrun と Mason は, (i) **Zollfrei 性**と (ii) **正則円板**という二つのキーワードに注目することでこれを実現した. ここでは Zollfrei 性について述べる.

Definition 3.1. 不定値計量 g (または共形構造 $[g]$) は, 全ての極大な null 測地線が閉となるとき **Zollfrei** であるという.

特に四次元の自己双対な不定値 Zollfrei 共形構造に関して, LeBrun らは以下を示した. (以下 LeBrun-Mason を LM. と略記)

Theorem 3.2 (LM.[4]). 自己双対共形構造の空間の中で, Zollfrei 性は開条件である.

Theorem 3.3 (LM.[4]). $(M, [g])$ を自己双対 Zollfrei 共形構造とすると, M は $S^2 \times S^2$ または $(S^2 \times S^2)/\mathbb{Z}_2$ と位相同型.

LeBrun-Mason 対応 自己双対共形構造に関する LeBrun-Mason 対応は次の通り.

Theorem 3.4 (LM.[4]). 次の二つの対象には, 標準的な元の近傍で自然な 1:1 対応がある:

- 空間対 (\mathbb{CP}^3, P) , ただし P は \mathbb{RP}^3 の埋め込み,
- $S^2 \times S^2$ 上の符号 $(- - ++)$ の自己双対 Zollfrei 共形構造.

上の定理中の空間対 (\mathbb{CP}^3, P) を, **LeBrun-Mason ツイスター空間**とよぶことにする. 定理の対応は, 以下のような**双ファイブレーション**によって特徴づけられる.

$$\begin{array}{ccc} & (\mathcal{Z}, \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}) & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ S^2 \times S^2 & & (\mathbb{CP}^3, P). \end{array}$$

$p: \mathcal{Z} \rightarrow S^2 \times S^2$ は $S^2 \times S^2$ 上の自己双対共形構造を反映した二次元**円板束**, $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ はその境界がなす S^1 束であり, p の各ファイバーは q によって (\mathbb{CP}^3, P) の**正則円板**に写される. すなわち, $S^2 \times S^2$ は空間対 (\mathbb{CP}^3, P) の正則円板の族のパラメータ空間と見なされる. q は S^1 束 $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ を実二次元の葉層構造でわる写像で, この写像が性質の良いものとなるために, 共形構造の **Zollfrei 性**が必要となる.

Tod-鎌田計量 (V, A) をドジッター空間 S^3_1 上のモノポールであって, $V > 0$ と仮定する. このとき, $\mathcal{M} := S^1 \times S^3_1$ 上の不定値自己双対計量 $\bar{g}_{V,A}$ を

$$\bar{g}_{V,A} = -V^{-2}(ds + A)^2 + g_{S^3_1} \quad (s \text{ は } S^1 \text{ 方向の座標})$$

によって定めることができる. さらに, V が既出の条件 (#) を少しシフトした条件

$$(\#)' \quad V(t, y) \rightarrow 1, V_t(t, y) \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \pm\infty \quad (y \text{ に関して一様収束})$$

をみたすとき, $\bar{g}_{V,A}$ は適当な共形変形をすることで \mathcal{M} の自然なコンパクト化 $\bar{\mathcal{M}} \cong S^2 \times S^2$ 上の自己双対計量 $g_{V,A}$ に拡張する.

上記の計量は K. P. Tod によって最初に発見され [7], 鎌田博行氏の不定値 Kähler 曲面の研究の中で独立に再発見された [2]. 以下 $g_{V,A}$ を **Tod-鎌田計量**とよぶ. Theorem 3.2 より, Tod-鎌田計量のうち標準的なものに十分近いものは Zollfrei であることが結論されるが, それらに限らず Tod-鎌田計量は全て Zollfrei であることが証明され, また, 対応する LeBrun-Mason ツイスター空間も次に述べるように具体的に書き下すことができる.

Tod-鎌田計量のツイスター空間 関数 $h \in C_*^\infty(S^2)$ に対し, $P_h \subset \mathbb{CP}^3$ を以下で定める:

$$P_h := \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{CP}^3 \mid z_3 = \bar{z}_0 e^{-h(z_1/z_0)}, z_2 = \bar{z}_1 e^{-h(z_1/z_0)}\}.$$

このとき, 空間対 (\mathbb{CP}^3, P_h) が, Tod-鎌田計量のツイスター空間となる. 正確な主張は Theorem 3.6 のようになるが, その前に, Tod-鎌田計量を考える際は, 条件 (#) ではなく, それをシフトした (#)' を用いるので, Theorem 2.3 をシフトした次の命題を用意しておく:

Proposition 3.5. 次の二つの対象は 1 対 1 に対応する:

- 関数 $h \in C_*^\infty(S^2)$,
- 条件 (#)' をみたす S^3 上のモノポール (V, A) のゲージ同値類.

対応は次式で与えられる:

$$V = 1 - Q\Delta_{S^2}h, \quad A = -\check{*}dRh. \quad (3.1)$$

Theorem 3.6 (N.[6]). 関数 $h \in C_*^\infty(S^2)$ とモノポール (V, A) が Proposition 3.5 の意味で対応しているとし, さらに $V > 0$ ($\Leftrightarrow Q\Delta_{S^2}h < 1$) と仮定する. このとき, Tod-鎌田計量 $g_{V,A}$ は Zollfrei で, その LeBrun-Mason ツイスター空間は (\mathbb{CP}^3, P_h) で与えられる.

条件 (#)' や $V > 0$ は Tod-鎌田計量を定義する際にそもそも必要な条件であるから, 上記の定理は, 全ての Tod-鎌田計量は Zollfrei であるという主張を含んでいる. また, $V > 0$ に対応する条件 $Q\Delta_{S^2}h < 1$ は, LeBrun-Mason ツイスター空間 (\mathbb{CP}^3, P_h) に関する臨界条件を与えていると考えられるが, 実際この条件がみたされないとき, 正則円板の族はある種の退化を起し, ツイスター対応が (少なくともこれまでの意味では) 破綻することも確認できる.

References

- [1] S. Helgason: *The Radon Transform (Second Edition)*, Progress in Mathematics vol.5, Birkhäuser (1999).
- [2] H. Kamada: *Compact Scalar-flat Indefinite Kähler Surfaces with Hamiltonian S^1 -Symmetry*, Comm. Math. Phys. **254** (2005) 23-44.
- [3] C. LeBrun, L. J. Mason: *Zoll Manifolds and complex surfaces*, J. Diff. Geom. **61**, (2002) 453-535.
- [4] C. LeBrun, L. J. Mason: *Nonlinear Gravitons, Null Geodesics, and Holomorphic Disks*, Duke Math. J. **136**, no.2 (2007) 205-273.
- [5] C. LeBrun, L. J. Mason: *The Einstein-Weyl Equations, Scattering Maps, and Holomorphic Disks*, Math. Res. Lett. **16** (2009) 291-301.
- [6] F. Nakata: *Wave equations and the LeBrun-Mason correspondence*, e-print arXiv:0907.0928 [math.DG]
- [7] K. P. Tod: *Indefinite conformally-ASD metric on $S^2 \times S^2$* : Further advances in twistor theory. Vol.III. Chapman & Hall/CRC (2001) pp.61-63, reprinted from Twistor Newsletter **36** (1993).

非負曲率多様体上の調和関数とグロモフ・ハウスドルフ収束

本多 正平 (京大数理研)*

1 ラーデマハアの定理と多様体の極限

古典的なラーデマハアの定理とは、任意の次元におけるユークリッド空間上の任意のリプシッツ関数はほとんど至るところ全微分可能である、という主張を指す。これはそのまま任意の有限次元リーマン多様体上でも正しい。すなわち、任意のリーマン多様体 M とその上の任意のリプシッツ関数 f に対して、あるボレル集合 $U \subset M$ が存在して、 $\text{vol}(M \setminus U) = 0$ を満たし、切断 $df : U \rightarrow T^*M$ が well-defined となる。

話を变えて、リーマン多様体の研究において、個々のリーマン多様体を研究するのではなく、与えられた適切な条件を満たすリーマン多様体全体に渡って成立する性質を調べることはとても重要である。例えば、「正のリッチ曲率を持つコンパクトリーマン多様体の基本群は常に有限群である」という主張はその一例である。そこで、ある定数 K でリッチ曲率が下から $(n-1)K$ で押さえられた n 次元完備リーマン多様体全般（もしくはさらに、アインシュタイン多様体であるといったような、プラスアルファの条件をつけて、それも満たす全体）に渡って成立する性質を調べることを考えたい。このような、リッチ曲率の下からの下限を仮定したリーマン多様体を持つ性質の研究は、代数、幾何、解析的にも興味深い一分野であることが知られている。

グロモフによる、グロモフ・ハウスドルフ収束の概念と、そのプレコンパクト性定理と呼ばれる主張、深谷氏による測度付きグロモフ・ハウスドルフ収束の概念とそのプレコンパクト性定理は、リッチ曲率が下に有界なリーマン多様体の研究において、多様体の収束・崩壊理論が非常に重要な道具の一つであること示唆している。そのことを以下に少し説明を与えよう。

点付き距離空間列 $(X_i, x_i), (i = 1, 2, \dots, \infty, x_i \in X_i)$ と X_i 上のラドン測度 ν_i に対して、点付き測度距離空間列 (X_i, x_i, ν_i) が $(X_\infty, x_\infty, \nu_\infty)$ に測度付きグロモフ・ハウスドルフ収束する (以下簡単に $(X_i, x_i, \nu_i) \rightarrow (X_\infty, x_\infty, \nu_\infty)$ と書く) とは、ある正の実数列 $R_i \rightarrow \infty, \epsilon_i \rightarrow 0$ と、写像 $\phi_i : B_{R_i}(x_i) \rightarrow B_{R_i}(x_\infty)$ が存在して、以下の条件を満たすことを言う：

1. $\phi_i(x_i) = x_\infty, B_{R_i}(x_\infty) \subset B_{\epsilon_i}(\phi_i(B_{R_i}(x_i)))$ が成り立つ。ここに、 $B_r(A)$ で A の r -開近傍を表すとする。
2. 任意の $x, y \in B_{R_i}(x_i)$ に対して、 $|\overline{x, y} - \overline{\phi_i(x), \phi_i(y)}| < \epsilon_i$ が成り立つ。ここに、 $\overline{x, y}$ は x と y の間の距離である。
3. 任意の $r > 0$ と、 $z_i \rightarrow z_\infty$ を満たす任意の $z_i \in Z_i (i = 1, \dots, \infty)$ に対して、 $\nu_i(B_r(z_i)) \rightarrow \nu_\infty(B_r(z_\infty))$ が成り立つ。ここに、 $z_i \rightarrow z_\infty$ とは、 $\overline{\phi_i(z_i), z_\infty} \rightarrow 0$ が成り立つことを言う。

そこで次の状況を考える： n を固定された正の整数、 K を固定された実数とし、 (M_i, m_i) を完備な点付き n 次元リーマン多様体列 ($i = 1, 2, \dots$) でそのリッチ曲率が下から $(n-1)K$ で押さえられているとし、 (Y, y) を

* Supported by GCOE 'Fostering top leaders in mathematics', Kyoto University.

固有な距離空間, $y \in Y$, ν を Y 上のあるラドン測度で, $(M_i, m_i, \underline{\text{vol}}) \rightarrow (Y, y, \nu)$ とせよ. ここで, 距離空間が固有であるとは, その任意の有界閉集合がコンパクトであることを言い, $\underline{\text{vol}}$ は正規化されたリーマン測度 $\underline{\text{vol}} = \text{vol}/\text{vol} B_1(m_i)$ である. 先に述べたプレコンパクト性定理とは, このような (Y, y, ν) の性質や, それと M_i の性質との関係を調べることで, リッチ曲率が下から $(n-1)K$ で押さえられた n 次元リーマン多様体全般に渡って成立する性質を導く一つの道具であると思ってよい. この捉え方が筆者が考える, リッチ曲率に関わる多様体の収束・崩壊理論である.

本講演では, この多様体の収束・崩壊理論に関して, リプシッツ関数の収束に関する, ある新しい概念を紹介し, その性質と応用を述べたい. そのためにはもう少し言葉が必要である. 以下, 上記 $(M_i, m_i), (Y, y, \nu)$ を固定する. チーガー・コールディングは [1] で, ラーデマハアの定理が Y でもある意味で正しいことを示した. 簡単に説明しよう. この状況で Y の余接束 T^*Y (これは位相空間である) が適切な意味で構成でき, 射影 $\pi: T^*Y \rightarrow Y$ (これはボレル写像である) が定まって, 次の性質を持つ:

1. $\nu(Y \setminus \pi(T^*Y)) = 0$.
2. 各 $x \in \pi(T^*Y)$ に対し, ファイバー $\pi^{-1}(x)$ は自然に有限次元ヒルベルト空間の構造を持つ. (その内積を簡単に $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と書き, それから定まるノルムを $|\cdot|$ と書くことにする.)
3. 任意の開集合 $U \subset Y$ とその上の任意のリプシッツ関数 f に対して, あるボレル集合 $U_f \subset U$ と切断 $df: U_f \rightarrow T^*Y$ (これはボレル写像である) が存在して, 次を満たす:
 - (a) $\nu(U \setminus U_f) = 0$.
 - (b) 任意の $x \in U_f$ に対して, $|df(x)| = \text{Lip}f(x)$ が成り立つ. ここに, $\text{Lip}f(x)$ は f の x における局所リプシッツ定数で,

$$\text{Lip}f(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \left(\sup_{z \in B_r(x) \setminus \{x\}} \frac{|f(x) - f(z)|}{\overline{x, z}} \right)$$

と定義される.

この T^*Y の持つ上記性質が Y 上のリプシッツ関数に関するラーデマハアの定理とみなせる.

次に, 空間のグロモフ・ハウスドルフ収束に伴う, リプシッツ関数の各点収束の概念を述べよう. R を正の実数とし, f_i を $B_R(m_i)$ 上のリプシッツ関数, f_∞ を $B_R(y)$ 上のリプシッツ関数としたとき, f_i が f_∞ に $B_R(y)$ 上, 各点収束する ($f_i \rightarrow f_\infty$ と書く) とは, $x_i \rightarrow x_\infty$ を満たす任意の $x_i \in B_R(m_i)$ と $x_\infty \in B_R(y)$ に対して, $f_i(x_i) \rightarrow f_\infty(x_\infty)$ となることを言う. 例えば, $z_i \rightarrow z_\infty$ を満たす, 任意の $z_i \in M_i$ と $z_\infty \in Y$ に対して, $r_{z_i} \rightarrow r_{z_\infty}$ が成り立つ. ここに r_{z_i} は z_i からの距離関数 (これは 1-リプシッツ関数) である: $r_{z_i}(x) = \overline{z_i, x}$. もし, 与えられた $B_R(m_i)$ 上のリプシッツ関数列 f_i が, $\sup_i (\text{Lip}f_i + |f_i(m_i)|) < \infty$ を満たせば, ある部分列 $\{n(i)\}_i$ と, $B_R(y)$ 上のあるリプシッツ関数 f_∞ が存在して $f_{n(i)} \rightarrow f_\infty$ となることが, アスコリ・アルツェラの定理と同様にしてわかる. ここに, $\text{Lip}f$ とは f のリプシッツ定数である: $\text{Lip}f = \sup_{x \neq z} |f(x) - f(z)|/\overline{x, z}$. 注意として, ディリクレ問題に対するラプラシアン固有関数のような, 幾何学的に意味のある $B_R(m_i)$ 上の関数 f_i を考えると, 上記 $\sup_i (\text{Lip}f_i + |f_i(m_i)|) < \infty$ という仮定は, リッチ曲率の下限の仮定と適切な勾配評価によって, 満たされることが多いことを注意しておく. **そこで以下, 正の実数 $R > 0$ と $B_R(m_i)$ 上のリプシッツ関数 f_i , $B_R(y)$ 上のリプシッツ関数 f_∞ で, $\sup_i \text{Lip}f_i < \infty$ かつ, $f_i \rightarrow f_\infty$ が成り立つ, という状況を固定する.** 注意として, この状況では, f_i は f_∞ にある意味で, 一様収束していることを指摘しておきたい. これで, 本講演で述べたい主張を与えるための言葉がそろった.

2 収束 $df_i \rightarrow df_\infty$ の定義

2.1 述べたいこと

以上の設定の下に、各 $x \in B_R(y)$ に対し、 df_i は df_∞ に点 x で収束するという定義を与えたい。安直にその定義を与えようとしたとき、まず $x_i \in B_R(m_i)$ で $x_i \rightarrow x$ となる列を取って、 $df_i(x_i)$ が $df_\infty(x)$ に収束する、と定義したいが、そもそも入っている空間が $df_i(x_i) \in T_{x_i}^* M_i$ と $df_\infty(x) \in T_x^* Y$ で異なるので、それらと比べることができないのが難しい。また、空間を固定して考えることによる種々の考察から、もしその定義がうまく定義できるのであれば、少なくとも次の性質は成り立って欲しい：

1. $z_i \rightarrow z_\infty$ なる任意の $z_i \in M_i$ と $z_\infty \in Y$ に対し、 dr_{z_i} は dr_{z_∞} に各 $x \in Y$ で収束する。
2. 各 f_i が調和関数や固有関数といったような、ラプラシアンに関わる幾何学的に意味のある関数であれば、 df_i は df_∞ に各 $x \in B_R(y)$ で収束する。
3. もし $B_R(y)$ 上で df_i が df_∞ に収束していれば、 f_i のエネルギーは f_∞ のエネルギーに収束する：

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_R(m_i)} (\text{Lip} f_i)^2 d\text{vol} = \int_{B_R(y)} (\text{Lip} f_\infty)^2 dv.$$

これらを満足する定義で、もっとも弱い定義を与えることができる。それが次であり、本講演でもっとも述べたいことである：

定義 2.1 (H)

任意の $x \in B_R(y)$ に対し、 x で df_i は df_∞ に収束する、を以下が成り立つこととして定義する：任意の $\epsilon > 0$ と、 $x_i \rightarrow x$ となる任意の $x_i \in B_R(m_i)$ 、 $z_i \rightarrow z_\infty$ なる任意の $z_i \in M_i$ と $z_\infty \in Y$ に対して、ある $r > 0$ が存在して、任意の $0 < t < r$ に対して、

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\text{vol} B_t(x_i)} \int_{B_t(x_i)} \langle dr_{z_i}, df_i \rangle d\text{vol} - \frac{1}{v(B_t(x))} \int_{B_t(x)} \langle dr_{z_\infty}, df_\infty \rangle dv \right| < \epsilon$$

と

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol} B_t(x_i)} \int_{B_t(x_i)} (\text{Lip} f_i)^2 d\text{vol} \leq \frac{1}{v(B_t(x))} \int_{B_t(x)} (\text{Lip} f_\infty)^2 dv + \epsilon$$

が成り立つ。

この定義のポイントは二つ目の式が不等式な点である。ここを不等式にしておくことで、与えられたリプシッツ関数列 f_i に対して、いつ df_i が df_∞ に収束するかのチェックがしやすくなる。以下、各 $x \in B_R(y)$ で df_i は df_∞ に収束するとき、簡単に $(f_i, df_i) \rightarrow (f_\infty, df_\infty)$ と書くことにする。次が成り立つことから、この定義は悪くない定義であることがわかる：

定理 2.2 (H)

次が成り立つ：

1. $z_i \rightarrow z_\infty$ を満たす任意の $z_i \in M_i$ と $z_\infty \in Y$ に対して、 $(r_{z_i}, dr_{z_i}) \rightarrow (r_{z_\infty}, dr_{z_\infty})$ 。
2. もし、 f_i が C^2 関数であって、

$$\sup_i \int_{B_R(m_i)} (\Delta f_i)^2 d\text{vol} < \infty$$

を満たせば, $(f_i, df_i) \rightarrow (f_\infty, df_\infty)$ が成り立つ. さらに, f_i が調和関数であれば, f_∞ も調和関数である.

3. $(f_i, df_i) \rightarrow (f_\infty, df_\infty)$ かつ $(g_i, dg_i) \rightarrow (g_\infty, dg_\infty)$ であれば, $(f_i + g_i, d(f_i + g_i)) \rightarrow (f_\infty + g_\infty, d(f_\infty + g_\infty))$ かつ $(f_i g_i, d(f_i g_i)) \rightarrow (f_\infty g_\infty, d(f_\infty g_\infty))$ が成り立つ. さらに, \mathbf{R} 上の連続関数列 F_i が, F_∞ にコンパクト一様収束しているとする,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_R(m_i)} F_i(\langle df_i, dg_i \rangle) d\text{vol} = \int_{B_R(y)} F_\infty(\langle df_\infty, dg_\infty \rangle) dv$$

が成り立つ.

ここで, 極限空間上の調和関数の定義については与えないことにする. そこで次に, これらの主張の証明のアイデアを簡単に述べたい.

2.2 証明のアイデア

まずチーガー・コールディングによって Y は rectifiable と呼ばれる性質を持つことがわかっている. この定義を正確に述べると時間がかかるので簡単に述べると, 多様体の定義が, ユークリッド空間上の開集合を同相写像で張り合わせた図形, として定義されるのに対し, 測度付き距離空間が rectifiable であるとは, 測度 0 を除いて, その距離空間がユークリッド空間上のボレル集合を双リプシッツ写像で張り合わせたような図形に見える, という定義である. 上記定理の証明における第一ステップは, その各双リプシッツ写像のある点からの距離関数の組で構成できることを示すことである. それを用いて, Y 上の任意のリプシッツ関数 f の, Y の点からの半径微分 $\langle dr_z, df \rangle$ を幾何的に計算する手段を, 分裂定理と呼ばれる深い結果を用いて与えることが第二ステップである. その計算方法を使って種々のリプシッツ関数のある点からの半径微分の計算を行い, その積分を, 無限小のレベルで分裂原理を用いることにより, コントロールすることが第三ステップである. それらの議論から, 上記主張が得られる. もちろんこれではほとんど説明になっていないので, もし興味をもたれた方がいらっしゃれば, [3] でその詳細を見ていただきたい. そこで最後に, この概念とその性質を用いたリーマン多様体への応用の一つを述べる.

3 非負曲率多様体上の調和関数

\mathbf{C} 上の有界正則関数は定数に限る, という事実はリュービルの定理として今日知られている. この微分幾何へのアナロジーとして, チェン・ヤウは, 非負のリッチ曲率を持つ完備なリーマン多様体上の有界な調和関数は定数に限る, という主張を示した. 以下, M をリッチ曲率が非負である $n (\geq 3)$ 次元完備なリーマン多様体として固定する. 非負の実数 d に対し, $\mathcal{H}^d(M)$ で高々 d 次の多項式増大度を持つ M 上の調和関数からなる線形空間とする. そこで, コールディング・ミニコッチは, 次元にのみ依存する正の定数 $C(n) \geq 1$ が存在して, 各 d に対して $\dim \mathcal{H}^d(M) \leq C(n)d^{n-1}$ が成り立つことを示した. 注意として, 上記チェン・ヤウの結果は $\dim \mathcal{H}^0(M) = 1$ という主張に他ならない. 以上の結果は, 非負のリッチ曲率を持つリーマン多様体上の多項式増大度を持つ関数はそれほど存在しないことの一つの表現であると考えられる.

そこで, コールディング・ミニコッチは次の研究方針として, 漸近体積と呼ばれる量:

$$V_M = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } B_R(m)}{\text{vol } B_R(0_n)}$$

を考え、これが正であるときに、 M 上の多項式増大度を持つ調和関数と、 M の漸近錘上の多項式増大度を持つ調和関数には関係があるだろう、と示唆した。ここで、 $m \in M, 0_n \in \mathbf{R}^n$ で、上記極限は常に存在し、一般に $0 \leq V_M \leq 1$ が成り立ち、かつ、この量は m の取り方によらない。以下では $V_M > 0$ と仮定し、固有な点付き距離空間 (M_∞, m_∞) が M の漸近錘であるとは、ある増大列 $R_i \rightarrow \infty$ があって、 $(M, m, R_i^{-1}d_M, \text{vol}) \rightarrow (M_\infty, m_\infty, H^n)$ が成り立つこととする。ここに、 d_M は M の距離で、 $R_i^{-1}d_M$ はリスケールされた距離である。注意として、チーガー・コールディング、ペレルマンの結果によって、少なくとも一つは M の漸近錘が存在するが、一意とは限らず、任意の漸近錘 (M_∞, m_∞) は、あるコンパクトな距離空間 X があって、その錘 $(C(X), p)$ と等長的であることが知られている。ここで、距離空間 X の錘の定義を与えることは出来ないが、 $\mathbf{R}_{\geq 0} \times X/\{0\} \times X$ 上に適切な距離を入れた距離空間であり、 p はその極である。

そこで、コールディング・ミニコッチによる上記示唆を実行するにはまず、漸近錘上の多項式増大度を持つ調和関数とは何であるかをはっきりさせる必要がある。説明を与えていない言葉が含まれているが、それは次である：

定理 3.1 (H)

M の任意の漸近錘 $(M_\infty, m_\infty) = (C(X), p)$ と任意の非負の実数 d に対し、

$$\dim \mathcal{H}^d(M_\infty) = \dim E_{d(d+n-2)}(X) \leq C(n)d^{n-1}$$

が成り立つ。ここに $E_{d_0}(X)$ は d_0 以下のラプラシアン固有値を持つ X 上の固有関数で張られる線形空間とする。

この定理は、ユークリッド空間上の多項式増大度を持つ調和関数は球面調和関数で生成される、という事実のアナロジーであり、 M の漸近錘上の多項式増大度を持つ調和関数の完全な特徴づけを与えている。この定理を用いると、各 (M_∞, m_∞) 上の多項式増大度を持つ調和関数からなる空間のヴェイユ型漸近評価を与えることができるが、ここでは省略する。その代わりに、コールディング・ミニコッチの示唆を支持する、 M 上の多項式増大度を持つ調和関数と、その漸近錘上の多項式増大度を持つ調和関数との間に一つの関係を与える次のリュービル型の定理を紹介する：

定理 3.2 (H)

次の性質を満たす $d_1 \geq 1$ が唯一つ存在する：

1. 任意の $0 < d < d_1$ と M の任意の漸近錘 (M_∞, m_∞) に対して、 $\dim \mathcal{H}^d(M) = \dim \mathcal{H}^d(M_\infty) = 1$ が成り立つ。
2. ある M の漸近錘 (M_∞, m_∞) が存在して、 $\dim \mathcal{H}^{d_1}(M_\infty) > 1$ が成り立つ。

参考文献

- [1] J. CHEEGER AND T. H. COLDING, On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, III, J. Differential Geom. 54 (2000), 37-74.
- [2] T. H. COLDING AND W. P. MINICOZZI II, Harmonic functions with polynomial growth, J. Differential Geom. 46 (1997), 1-77.
- [3] S. HONDA, Ricci curvature and convergence of Lipschitz functions, preprint, arXiv:1005.1040.

チーガーとコールディングの微分同型定理の拡張について¹²

近藤 慶

東海大学 理学部 数学科 非常勤講師

e-mail :

keikondo@keyaki.cc.u-tokai.ac.jp

概要

X を完備・非コンパクト連結 n 次元リーマン多様体とする。このとき、チーガーとコールディングは、もし X のリッチ曲率が**至る所非負**で、かつ、**ユークリッド型**の体積増大値が、 X の各点で、十分 1 に近ければ、 X は、 n 次元ユークリッド空間に微分同型である事を示した。[KT2] において、我々は、この定理の条件「 X のリッチ曲率が**至る所非負**」を外した拡張に成功した。本講演では、その拡張定理についてお話しする。

1 ユークリッド型の体積増大値を使った微分同型定理

グローヴと塩濱 [GS] によって定義された完備リーマン多様体 X 上の点 $x \in X$ に関する距離関数 $d(x, \cdot)$ の臨界点³とその理論⁴は、 X の位相を調べる際に大変強力なイメージと情報を我々に与えてくれる。特に、 X が非コンパクトであるとき、もし $d(x, \cdot)$ の臨界点が (x 以外に) なければ、 X がユークリッド空間に微分同型になる事が直ぐに理解出来る。ところが、「 $d(x, \cdot)$ の臨界点の集合が有界になる様な自然な条件」を見つける事は比較的簡単ではあるが ([KT1] を参照)、「 $d(x, \cdot)$ の臨界点を殲滅せしめる自然な条件」を見つける事は、意外に難しい。つまり、 X が、ユークリッド空間に微分同型になるという事が異常な事態だと思えば、かなり強力な条件を付けざるを得ないと考えるのが、素直なのかもしれない ([ST] を参照)。

以下、 X をリッチ曲率が**至る所非負**である完備・非コンパクト連結 n 次元リーマン多様体とする。従って、 X に対する参照空間は、曲率が 0 である n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n である。ここで注意したい事は、リッチ曲率の幾何は、『量』の世界、つまり、『体積』の世界であると言う事である (例えば、各 X と \mathbb{R}^n 内で、それぞれ同じ半径の距離球の体積を考えれば、「 \mathbb{R}^n 内の距離球の体積の方が X のそれより大きい」として、非負リッチ曲率の幾何の特徴を一言で言い表す事が出来る)。

¹第 57 回幾何学シンポジウム講演用アブストラクト, 2010 年 8 月 8 日, 神戸大学

²本講演の結果は、田中 實教授 (東海大学) との共同研究からのものである。

³任意に固定した点 $x \in X$ に対して、点 $y \in X$ が、距離関数 $d(x, \cdot)$ の**臨界点**であるとは、任意の接ベクトル $v \in T_y X$ に対して、 y と x を結ぶ最短測地線 γ が存在して、

$$\angle(v, \gamma'(0)) \leq \pi/2$$

を満たす時を言う。

⁴グロモフ [G] によって、彼らのテクニックはイソトピー命題として、純化された。

さて、上述した「 $d(x, \cdot)$ の臨界点を殲滅せしめる」何か強力な条件を X に与える為に、大津 [O] は、不変量

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } B_t(x)}{t^n \text{vol } \mathbb{S}^{n-1}(1)} \quad (1.1)$$

を初めて導入した。 X の参照空間が \mathbb{R}^n である事から、(1.1)を X の**ユークリッド型の体積増大値**と呼ぶ。ここで、 $B_t(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < t\}$, $\mathbb{S}^{n-1}(1) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$ であり、 $\text{vol } B_t(x)$ と $\text{vol } \mathbb{S}^{n-1}(1)$ は、それぞれ $B_t(x)$ と $\mathbb{S}^{n-1}(1)$ の体積を表す。大津 [O]は、 X に対して、非負と言うリッチ曲率の条件以外に、参照曲面が有限全曲率を許容する漸近的非負断面曲率の条件を付け加え、 X のユークリッド型の体積増大値が十分1に近いと言う状況のもとで、 X が \mathbb{R}^n に微分同型である事を示した。ここで、「漸近的非負断面曲率の条件」が加えられた理由は、トポノゴフの比較定理を使いたいからである。つまり、『量』だけの世界では、距離関数の臨界点の理論(測地線論)と上手く噛み合わないからである。

この大津の結果の後、ユークリッド型の体積増大値を使ったありとあらゆる微分同型定理が生まれたが、そんな中でも、「断面曲率の条件」を外したと言う意味において、次のチーガーとコールディングの結果は、群を抜いて光り輝いている。

定理 1.1 ([CC, Theorem A.1.11]) X をリッチ曲率が**至る所非負**である完備・非コンパクト・ n 次元リーマン多様体とする。この時、 n による定数 $\delta(n) > 0$ が存在して、もし、各点 $x \in X$ で、ユークリッド型の体積増大値が

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } B_t(x)}{t^n \text{vol } \mathbb{S}^{n-1}(1)} \geq 1 - \delta(n)$$

を満たすならば、 X は \mathbb{R}^n に微分同型である。

近年、我々は、この定理1.1の条件「 X のリッチ曲率が**至る所非負**」を外し、この定理の拡張に成功した([KT2])。つまり、我々の比較定理における参照空間は、必ずしも定曲率空間ではない。その拡張には、『放射リッチ曲率の幾何』の概念が必要である。次節では、その『放射リッチ曲率の幾何』の定義について述べる。

2 定義：放射リッチ曲率の幾何とモデル型の体積増大値

以下、 \widetilde{M}^n を基点 $\tilde{p} \in \widetilde{M}$ を持つ、 \mathbb{R}^n に同相な、完備・非コンパクト n 次元リーマン多様体とし、 G を \widetilde{M}^n の断面曲率とする。

定義 2.1 組 $(\widetilde{M}^n, \tilde{p})$ が、 **n 次元モデル**であるとは、 \widetilde{M}^n のリーマン計量が ds^2 が、測地的極座標

$$ds^2 = dt^2 + f(t)^2 d\theta^2, \quad \forall (t, \theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{S}_\tilde{p}^{n-1} \quad (2.1)$$

で与えられている時を言う。特に、 $n=2$ の時、 $(\widetilde{M}^2, \tilde{p})$ を**回転面モデル**と呼ぶ。ここで、 f は $(0, \infty)$ 上で定義された正定値 C^∞ -関数で、0の周りで滑らかに奇関数へと拡張出来るものとし、 $d\theta^2$ は $\mathbb{S}_\tilde{p}^{n-1} := \{v \in T_{\tilde{p}}\widetilde{M}^n \mid \|v\| = 1\}$ 上のリーマン計量とする。

n 次元モデル $(\widetilde{M}^n, \tilde{p})$ の分類については、[KK] を参照。

定義 2.2 $(\widetilde{M}^n, \tilde{p})$ を n 次元モデルとする。このとき、 G を \tilde{p} から出る任意の子午線 $\tilde{\gamma}$ に制限した関数

$$G \circ \tilde{\gamma} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

を $(\widetilde{M}^n, \tilde{p})$ の放射曲率関数と呼ぶ。

放射曲率関数 $G \circ \tilde{\gamma} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して、 f がヤコビの微分方程式

$$f''(t) + G(\tilde{\gamma}(t))f(t) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

を自然に満たす事に注意したい。

以下、組 (M, p) を基点 $p \in M$ を持つ完備・非コンパクト n 次元リーマン多様体とする。

定義 2.3 基点 p に関する (M, p) の放射リッチ曲率が n 次元モデル $(\widetilde{M}^n, \tilde{p})$ の放射曲率関数 $G(\tilde{\gamma}(t))$ で下から押さえられているとは、 p から出る (速さが 1 の) 任意の最短測地線 $\gamma : [0, a) \longrightarrow M$ に沿って、 $\gamma'(t)$ に関する M のリッチ曲率 Ric_p が

$$\text{Ric}_p(\gamma'(t)) := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(\gamma'(t), e_i)\gamma'(t), e_i \rangle \geq G(\tilde{\gamma}(t)), \quad \forall t \in [0, a) \quad (2.2)$$

を満たす時を言う。ここで、 R は M のリーマン曲率テンソルを表し、 $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\} := \{e_1(t), e_2(t), \dots, e_{n-1}(t)\}$ は、 $\gamma'(t)$ に直交する $T_{\gamma(t)}M$ 内の超曲面の正規直交基底を表す。

例えば、(2.2) のもと、 n 次元モデル $(\widetilde{M}^n, \tilde{p})$ のリーマン計量が $dt^2 + t^2d\theta^2$ 、又は、 $dt^2 + \sinh^2 t d\theta^2$ であるならば、放射曲率関数は、 $G(\tilde{\gamma}(t)) = 0$ 、又は、 $G(\tilde{\gamma}(t)) = -1$ となる。特に、放射リッチ曲率の符号は、ワイルド (デタラメ) に変わる事に注意したい ([TK] を参照)。

定義 2.4 基点 p に関する (M, p) の放射リッチ曲率が n 次元モデル $(\widetilde{M}^n, \tilde{p})$ の放射曲率関数 $G(\tilde{\gamma}(t))$ で下から押さえられているとする。このとき、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } B_t(p)}{\text{vol } B_t(\tilde{p})} \quad (2.3)$$

を M のモデル型の体積増大値と呼ぶ。ここで、 $B_t(p) := \{x \in M \mid d(p, x) < t\}$, $B_t(\tilde{p}) := \{\tilde{x} \in \widetilde{M}^n \mid d(\tilde{p}, \tilde{x}) < t\}$ である。

(2.3) を『モデル型』と呼ぶ理由は、(1.1) のユークリッド型の体積増大値と違い、放射リッチ曲率の符号がワイルドに変わるからである。

3 主結果

本講演の主結果は、以下である：

主定理. ([KT2]) M を完備・非コンパクト連結 n 次元リーマン多様体とする。このとき、任意に固定した点 $p \in M$ に対して、

(A-1) $[0, \infty)$ 上で定義された二つのリップシッツ関数 $G(t)$ と $K(t)$ が存在し、各自、それぞれ、以下を満たす：

(A-1.1) p に関する M の放射リッチ曲率が、 G を放射曲率関数として持つ n 次元モデル $(\widetilde{M}^n, \tilde{p})$ のそれの下から押さえられる。

(A-2.2) p に関する M の放射断面曲率が、 K を放射曲率関数として持つ回転面モデル $(\widetilde{N}, \tilde{o})$ のそれの下から押さえられる⁵。

(A-2) 更に、もし M と (A-1.1) の n 次元モデル $(\widetilde{M}^n, \tilde{p})$ が

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{vol } B_t(\tilde{p}) = \infty \quad (3.1)$$

かつ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } B_t(p)}{\text{vol } B_t(\tilde{p})} \geq 1 - F(\delta(K^*)) \quad (3.2)$$

を満たせば、 M は、 \mathbb{R}^n に微分同型である。ここで、

$$K^* := \min\{0, G, K\}, \quad \delta(K^*) := \frac{\pi}{2} \exp\left(\int_0^\infty t K^*(t) dt\right)$$

であり、 F は、 $[0, \pi]$ 上の関数で

$$F(r) := \left(\int_0^\pi \sin^{n-2} t dt\right)^{-1} \int_0^r \sin^{n-2} t dt$$

と定義される。

(A-2) において、条件として $\int_0^\infty t K^*(t) dt$ の有界性は、必要ない。つまり、その積分値が有界であれ非有界であれ、(A-2) は成立する。更に、(A-2) は、定理 1.1 に対して、以下の三点においてアドバンテージを持つ：(i) 条件 (3.1) は、大変自然である。例えば、 $\widetilde{M}^n = \mathbb{R}^n$ であるとき。(ii) 条件 (3.2) において、我々のモデル型の体積増大度は、具体的な値で下から押さえられている。(iii) 点 p は、固定点。

尚、条件 (3.1) は、放射断面曲率の場合は、必要がない、即ち、主結果の系として、以下を得る：

⁵基点 p に関する (M, p) の放射断面曲率が回転面モデル $(\widetilde{M}^2, \tilde{p})$ の放射曲率関数 $K(\tilde{\gamma}(t))$ で下から押さえられているとは、 p から出る (速さが 1 の) 任意の最短測地線 $\gamma: [0, a) \rightarrow M$ に沿って、 M の断面曲率 K_M が

$$K_M(\sigma_t) \geq K(\tilde{\gamma}(t)), \quad \forall \sigma_t \subset T_{\gamma(t)}M, \quad \forall t \in [0, a)$$

を満たす時を言う。ここで、 $\sigma_t \subset T_{\gamma(t)}M$ は、 $\gamma'(t)$ と接ベクトル $v \in T_{\gamma(t)}M$ で張られる 2 次元線形空間。

主定理の系. ([KT2]) (M, p) を、基点 $p \in M$ を持つ、完備・非コンパクト連結 n 次元リーマン多様体とし、 p に関する M の放射断面曲率が回転面モデル $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ の放射曲率関数 $G(\tilde{\gamma}(t))$ で下から押さえられているとする。もし

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } B_t(p)}{\text{vol } B_t(\tilde{p})} \geq 1 - F(\delta(G_-))$$

ならば、 M は、 \mathbb{R}^n に微分同型である。ここで、 $G_- := \min\{0, G\}$ とおいた。

この系は、do Carmo と Changyu ([CaCh]) の結果を含む。つまり、 f を $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ のねじれ関数とすれば、 $f(t) = t$ であるとき、do Carmo と Changyu のケースとなる。

参考文献

- [CaCh] M. do Carmo and X. Changyu, *Ricci curvature and the topology of open manifolds*, Math. Ann., **316** (2000), no. 2, 391–400.
- [CC] J. Cheeger and T. H. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I*, J. Differential Geom., **46** (1997), no. 3, 406–480.
- [G] M. Gromov, *Curvature, diameter and Betti numbers*, Comment. Math. Helv. **56** (1981), 179–195.
- [GS] K. Grove and K. Shiohama, *A generalized sphere theorem*, Ann. of Math. (2) **106** (1977), 201–211.
- [KK] N. N. Katz and K. Kondo, *Generalized space forms*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 2279–2284.
- [KT1] K. Kondo and M. Tanaka, *Total curvatures of model surfaces control topology of complete open manifolds with radial curvature bounded below. II*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc., [arXiv.org/abs/0901.4019](https://arxiv.org/abs/0901.4019)
- [KT2] K. Kondo and M. Tanaka, *Sufficient conditions for open manifolds to be diffeomorphic to Euclidean spaces*, (13 pp.), Preprint 2010, Submitted to Differ. Geom. Appl. (May 20, 2010), arxiv.org/abs/1001.1279
- [O] Y. Otsu, *Topology of complete open manifolds with non-negative Ricci curvature*, Geometry of manifolds (Perspect. Math., vol. 8, 295–302), San Diego, Academic Press, 1989.
- [ST] K. Shiohama and M. Tanaka, *Compactification and maximal diameter theorem for non-compact manifolds with radial curvature bounded below*, Math. Zeitschrift **241** (2002), 341–351.
- [TK] M. Tanaka and K. Kondo, *The Gaussian curvature of a model surface with finite total curvature is not always bounded.*, In preparation, 2008–2010.

DYNAMICAL MORSE INEQUALITY

深谷 友宏*

京都大学大学院理学研究科

この解説記事は、京都大学の浅岡正幸氏及び塚本真輝氏との共同研究に基づきます。

1 導入

Bertelson-Gromov は [2] にて **Dynamical Morse inequality** の研究を提唱しました。この記事では彼等の理論を紹介し、私達の共同研究 [1] がその理論をどのように補完しているかを解説します。

X を閉多様体とし、 $f: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を滑らかな関数とします。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、 $f: X^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ を次の式で定めます。

$$(1) \quad f_n(x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, x_{i+1}).$$

f_n の“物理的”な意味は次の通りです。 n 個の“原子”が直線上に並んだ“結晶”を考えます。各原子の状態は多様体 X で記述されているとし、隣接する二つの原子の状態に依って定まる“ポテンシャル”が関数 $f: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ で与えられているとします。このとき f_n の臨界点はこの“結晶”の“基底状態”を表していると考えられます。 n を大きくしていったときに f_n の臨界点の個数の漸近的な振る舞いは、統計力学的にも興味深いと思われれます。そこで、 $n \rightarrow \infty$ での極限での“ f_∞ ”の臨界点の“繰り込まれた個数”というものを定義して、それを $X^{\mathbb{N}}$ の“繰り込まれた Betti 数”で評価しよう、というのが Bertelson-Gromov の理論です。

c を実数とし δ を正の実数とします。このとき、 $N_n(c, \delta)$ を f_n の臨界点 p で、 $c - \delta < f_n(p) < c + \delta$ を満たすものの個数と定めます。すなわち：

$$N_n(c, \delta) = \#\{p \in X^{n+1} : (df_n)_p = 0, c - \delta < f_n(p) < c + \delta\}.$$

さらに $N(c, \delta) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N_n(c, \delta)$ とおき、 $N(c)$ を次で定めます。

$$N(c) = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(c, \delta).$$

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 57R70

Key words and phrases. critical point, Morse function, Betti-number entropy

Bertelson-Gromov は [2] にて次の **Dynamical Morse inequality** を証明しました.

定理 1.1 (Bertelson-Gromov). 次の条件が満たされていると仮定する:

$$(2) \quad \text{全ての } f_n: X^{n+1} \rightarrow \mathbb{R} (n \geq 1) \text{ は Morse 関数である.}$$

このとき任意の $c \in \mathbb{R}$ に対し, 次の不等式が成り立つ.

$$(3) \quad N(c) \geq b(c)$$

ここで $b(c)$ は [2] で導入された **Betti-number entropy** である. これについては第 2 節で解説する.

ここで, 第 2 節で述べられる性質を使って, 上記の不等式について考察してみましょう. まず少し記号を用意します. $m_n = \min_{p \in X^{n+1}} (f_n(p))$, $M_n = \max_{p \in X^{n+1}} (f_n(p))$ とおきます. 極限 $m_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \sup_{n \geq 1} m_n$ と $M_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \inf_{n \geq 1} M_n$ が存在することは初等的に示されます [3, Lemma 3.1]. 関数 $b(c)$ は凹関数であり $m_\infty < c < M_\infty$ のとき $b(c) > 0$ です. したがって $m_\infty \neq M_\infty$ であれば¹, 上記の力学 Morse 不等式 (2) は臨界点の分布 $N(c)$ に関する非自明な評価を与えます.

さて, 定理 1.1 から当然次の問題が浮かんできます: 定理の仮定 (2) を満たす滑らかな関数は沢山あるのか. 私達の共同研究でこの問題に肯定的な結果が得られました. 私達の主結果を述べる前に, この問題が非自明であるということを強調しておきます. 例えば,

$$\begin{aligned} n f_n(x, \dots, x, y_1, \dots, y_m, x, \dots, x) \\ = f(x, y_1) + f(y_m, x) + (n - m - 1) f(x, x) + \sum_{i=1}^{m-1} f(y, y_{i+1}) \end{aligned}$$

の値は y_1, \dots, y_m の前に現れる x の個数に依存しません. f_n を標準的な方法で摂動するとこの性質は保たれないので, 既知の議論はそのままでは適用できないのです.

以下に私達の主結果を述べます. $C^\infty(X \times X)$ を $X \times X$ 上の実数値 C^∞ 級関数の集合とし, C^∞ -収束の位相を入れます.

定理 1.2 (Asaoka-Tsukamoto-F). 条件 (2) を満たすような $f \in C^\infty(X \times X)$ の集合は $C^\infty(X \times X)$ の中の第 2 類集合²である. 実際, 可算個の稠密開集合の共通部分を含む.

$C_s^\infty(X \times X)$ で $f \in C^\infty(X \times X)$ のうち, 対称なもの, すわなち, 任意の $x, y \in X$ に対し $f(x, y) = f(y, x)$ を満たすもの全体を表すことにします. X^{n+1} を “結晶の状態空間” とみなすとき, f が対称であるという仮定は自然な条件です.

¹ f が対角 $\Delta = \{(x, x)\} \subset X \times X$ 上で定数でなければ, $m_\infty \neq M_\infty$ となる.

² X を位相空間とし, $A \subset X$ とする. 閉包 \bar{A} が内点を持たないとき, A は疎であるという. 高々可算個の疎集合の和として表される集合を第 1 類集合という. 第 1 類集合でない集合を第 2 類集合という.

定理 1.3 (Asaoka-Tsukamoto-F). 条件 (2) を満たすような $f \in C_s^\infty(X \times X)$ の集合は $C_s^\infty(X \times X)$ 中の第 2 類集合である. 実際, 可算個の稠密開集合の共通部分を含む.

2 Betti-number entropy 概説

2.1 微分位相幾何学からの準備

M を n -次元コンパクト C^∞ -級多様体とします. M が向き付け可能な場合は (実数係数の) de Rham コホモロジーを使い, そうでない場合は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数の特異コホモロジーを使うことにします. $a \in H^*(M) = \bigoplus_{k \geq 0} H^k(M)$ とし, $U \subset M$ を開集合とします.

定義 2.1. ある開集合 $V \subset M$ が存在して $M = U \cup V$ かつ $H^*(V)$ で $a|_V = 0$ となるとき, a のサポートは U に含まれる³ といひ, $\text{supp } a \subset U$ と表す³.

de Rham コホモロジーを使う場合, $\text{supp } a \subset U$ はある閉微分形式 α が存在して, $\text{supp } \alpha \subset U^4$ かつ $a = [\alpha]$ であることを意味します.

例 2.2. $a \in H^{\dim M}(M)$ とする. 任意の空でない開集合 $U \subset M$ に対し $\text{supp } a \subset U$.

補題 2.3. $a, b \in H^*(M)$ とし, $U, V \subset M$ を開集合とする. $\text{supp } a \subset U$ かつ $\text{supp } b \subset V$ であるなら, $\text{supp } a \cup b \subset U \cap V$ である.

証明. de Rham コホモロジーの場合は微分形式を考えれば明かです. □

$a \in H^q(M)$ に対し, $\text{PD}(a) = a \cap [M] \in H_{n-q}(M)$ で a の Poincaré 双対元を表すことにします.

補題 2.4. $a \in H^q(M)$ とし, $U \subset M$ を開集合とする. $\text{supp } a \subset U$ は, $\text{PD}(a)$ が写像 $H_{n-q}(U) \rightarrow H_{n-q}(M)$ の像に含まれることと同値である.

命題 2.5. $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ を Morse 関数とし, $c < d$ を実数とする. $A \subset H^*(M)$ を部分ベクトル空間で次の条件を満たすものとする: 全ての $a \in A \setminus 0$ は, $\text{supp } a \subset \varphi^{-1}(-\infty, d)$ かつ, ある $b \in H^*(M)$ で $\text{supp } b \subset \varphi^{-1}(c, +\infty)$ なるものが存在して $a \cup b \neq 0$ を満たす. このとき

$$\#\{p \in \varphi^{-1}(c, d) : (d\varphi)_p = 0\} \geq \dim A.$$

証明. 補題 2.4 を使ってコホモロジー類のサポートに関する条件を, ホモロジー類の条件に置き換えて, Morse 理論を使います. □

³ $\text{supp } a$ という集合が定義された訳ではないことに注意.

⁴ α は微分形式だから $\text{supp } \alpha$ は集合として定義されている.

2.2 Betti-number entropy

この節では Bertelson-Gromov[2] で導入された Betti-number entropy について解説します. X, f, f_n, m_n, M_n を第 1 節で導入した通りとします. $\pi_n: X^{n+1} \rightarrow X^n$ を射影 $(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1})$ とします. 開集合 $U \subset X^{n+1}$ に対し, 部分ベクトル空間 $A_n(U) \subset H^*(X^{n+1})$ を,

$$A_n(U) = \{a \in \pi_n^*(H^*(X^n)) : \text{supp } a \subset U\}$$

で定めます. $c \in \mathbb{R}, \delta > 0$ に対し, 次の写像を考えます:

$$\begin{aligned} A_n(f_n^{-1}(-\infty, c + \delta)) &\rightarrow \text{Hom}(A_n(f_n^{-1}(c - \delta, +\infty)), A_n(f_n^{-1}(c - \delta, c + \delta))), \\ a &\mapsto (b \mapsto a \cup b). \end{aligned}$$

Betti-number entropy $b(c)$ は次で定義されます.

$$b(c) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log b_n(c, \delta) \right).$$

命題 2.5 より $c \in \mathbb{R}, \delta > 0$ に対して $N_n(c, \delta) \geq b_n(c, \delta)$ となるので, $N(c) \geq b(c)$ を得ます.

以下に, Betti-number entropy の基本的な性質を列挙します. 証明は [2] を参照してください.

命題 2.6. $c \in [m_\infty, M_\infty]$ なら $b(c) \geq 0$. $c \notin [m_\infty, M_\infty]$ なら $b(c) = -\infty$.

命題 2.7. $b(c)$ は凹関数: $c, c' \in \mathbb{R}$ と $0 \leq \alpha \leq 1$ に対し, $b(\alpha c + (1 - \alpha)c') \geq \alpha b(c) + (1 - \alpha)b(c')$.

命題 2.8. $b(c) > 0$ となる $c \in \mathbb{R}$ が存在する.

系 2.9. $m_\infty \neq M_\infty$ であるなら, $c \in (m_\infty, M_\infty)$ に対し $b(c) > 0$.

3 定理 1.2, 1.3 の証明のアイデア

X を滑らかな閉多様体とします. $f \in C^\infty(X \times X)$ に対し, $S_n(f) \in C^\infty(X^{n+1})$ を

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, x_{i+1})$$

で定めます. $f_n = S_n(f)/n$ となります. $n \geq 1$ を固定したときに, 集合 $\{f \in C^\infty(X \times X) : S_n(f) \text{ は Morse 関数}\}$ は $C^\infty(X \times X)$ の開集合です (同様の主張は $C_s^\infty(X \times X)$ に対しても成立します). したがって定理 1.2, 1.3 は次の定理から従います.

定理 3.1. $n \geq 1$ を固定する. 任意の $f \in C^\infty(X \times X)$ は $S_n(g)$ が Morse 関数になるような $g \in C^\infty(X \times X)$ でいくらでも近似できる. f が対称なら, 対称な関数 g で近似できる.

証明の要点は次の通りです. $n \geq 1$ を固定して考えます. まず, X は \mathbb{R}^N に埋め込まれていると仮定します. $\mathbf{p} \in X^{n+1}$ と $\boldsymbol{\alpha} \in (\mathbb{R}^N)^{n+1}$ に対し, ある対称関数 $f_{\mathbf{p},\boldsymbol{\alpha}} \in C_s^\infty(X \times X)$ が存在して

$$(4) \quad S_n(f_{\mathbf{p},\boldsymbol{\alpha}})(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle$$

が $\mathbf{x} \in X^{n+1}$ で成立すればよいのですが, もちろんそれは不可能です. しかし, 局所的には (4) が成立するように $f_{\mathbf{p},\boldsymbol{\alpha}}$ を構成することができます. 点 $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_n)$ の各成分の内の, どの二つの成分が一致しているか, に着目するところが要です. そこで \mathbb{P}_n で $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ の分割全体を表します. $\sigma \in \{P_1, P_2, \dots, P_l\} \in \mathbb{P}_n$ に対し, $|\sigma| = l$ とし, 各 $i \in P_j (j = 1, 2, \dots, n)$ に対し $\sigma(i) = P_j$ とします. 例えば $\sigma = \{\{0\}, \{1, 3\}, \{2\}\} \in \mathbb{P}_3$ なら $|\sigma| = 3$, $\sigma(0) = \{0\}$, $\sigma(1) = \sigma(3) = \{1, 3\}$, $\sigma(2) = \{2\}$. $\sigma, \tau \in \mathbb{P}_n$ に対し, σ が τ の細分のとき $\tau \geq \sigma$ と定めます.

$\sigma \in \mathbb{P}_n$ に対し, $X_\sigma, \mathbb{R}_\sigma^N$ を次で定めます.

$$\begin{aligned} X_\sigma &= \{(x_0, \dots, x_n) \in X^{n+1} : \sigma(i) = \sigma(j) \text{ なら } x_i = x_j\}, \\ \mathbb{R}_\sigma^N &= \{(v_0, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^N)^{n+1} : \sigma(i) = \sigma(j) \text{ なら } v_i = v_j\}. \end{aligned}$$

$X_\sigma \subset \mathbb{R}_\sigma^N$ です. $\tau \geq \sigma$ なら $X_\tau \subset X_\sigma$ かつ $\mathbb{R}_\tau^N \subset \mathbb{R}_\sigma^N$ です.

$$\Sigma_\sigma = \bigcup_{\tau \geq \sigma} X_\tau$$

とおきます. 和は σ の真の細分全体に渡ります. $\Sigma_\sigma \subset X_\sigma$ です.

補題 3.2. $\sigma \in \mathbb{P}_n$, $\mathbf{p} \in X_\sigma \setminus \Sigma_\sigma$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_\sigma^N$ とする. このときある対称関数 $f_{\mathbf{p},\boldsymbol{\alpha}} \in C_s^\infty(X \times X)$ が存在して $S_n(f_{\mathbf{p},\boldsymbol{\alpha}}) = \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle$ が全ての $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{p}} \cap X_\sigma$ で成立する. ここで $U_{\mathbf{p}}$ は \mathbf{p} の X^{n+1} でのある開近傍.

証明. [1, Lemma 2.6.] を見てください. □

参考文献

- [1] Masayuki Asaoka, Tomohiro Fukaya, and Masaki Tsukamoto. Remark on dynamical morse inequality. *Kyoto university Preprint*, 2009.
- [2] Mélanie Bertelson and Misha Gromov. Dynamical Morse entropy. In *Modern dynamical systems and applications*, pages 27–44. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [3] Tomohiro Fukaya and Masaki Tsukamoto. Asymptotic distribution of critical values. *Geom. Dedicata*, DOI 10.1007/s10711-009-9372-3.

〒606-8502

京都市左京区北白川追分町京都大学理学研究科数学教室

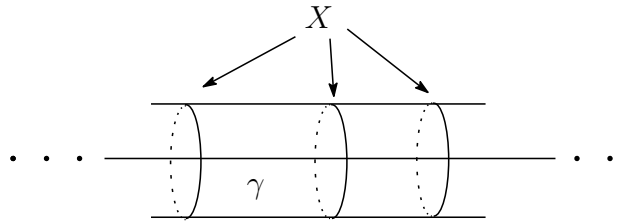
E-mail address: tomo_xi@math.kyoto-u.ac.jp

サブリーマン多様体の位相的分裂定理

伊藤 和貴 (東北大学大学院理学研究科数学専攻 D1)

リーマン幾何学の重要な定理として次の Cheeger-Gromoll の等長的分裂定理が知られている.

定理 1 (J. Cheeger and D. Gromoll [2]). (M, d) を非負リッチ曲率を持つ完備リーマン多様体とする. (M, d) が直線 γ を含むならば, あるリーマン多様体 X が存在して, M と直積リーマン多様体 $X \times \mathbb{R}$ とが等長同型となる.



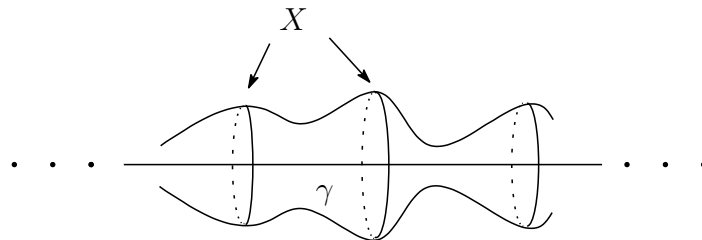
以下では (M, \mathcal{D}, d) で連結 n 次元多様体 M 上の階数 m の分布 $\mathcal{D} \subset TM$ から定まるサブリーマン多様体を表す. 次の条件を考える.

(M, \mathcal{D}, d) は完備で singular minimizer を含まず, ルベーク測度 μ とある実数 $N \in [1, +\infty)$ に対して MCP(0, N) を満たす. (*)

言葉の説明は後で与える. 本研究 [4] では定理 1 について, リーマン多様体をサブリーマン多様体に, 非負リッチ曲率の条件を MCP(0, N) (measure contraction property) に取り替えて調べ, 次の二つの定理を得た.

定理 2 ([4] を参照). (M, \mathcal{D}, d) が (*) を満たし, 直線 γ を含むならば, ある多様体 X が存在して, M と直積多様体 $X \times \mathbb{R}$ とが微分同相となる.

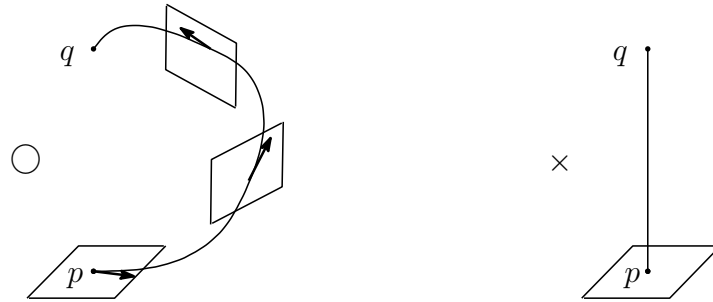
定理 3 ([4] を参照). $\text{rank } \mathcal{D} = 2, \dim M = 3$ とする. (M, d, μ) が (*) を満たせば, M と直積距離空間 $X \times \mathbb{R}$ とが距離空間として等長同型となるような距離空間 X は存在しない.



以下に定理に現れる言葉を説明する. 多様体 M 上のルベグ測度 μ とは, 各座標近傍のルベグ測度について絶対連続な M 上の測度のこととする. サブリーマン多様体 (M, \mathcal{D}, d) とは, 2 点 $p, q \in M$ に対してそれらの距離 d が次で与えられたもののことである.

$$d(p, q) := \inf_c \int_0^1 |\dot{c}(t)| dt.$$

ただし \inf は, $c : [0, 1] \rightarrow M$ は絶対連続, $c(0) = p, c(1) = q$, ほとんどすべての $t \in [0, 1]$ で $\dot{c}(t) \in \mathcal{D}_{c(t)}$, という条件の下でとる.



しかし, この d は一般に多様体の元の位相を与えない. d が多様体の位相を与えるように分布 \mathcal{D} には次のヘルマンダー条件 [7] を仮定する.

定義 4 ([3, 7] を参照). ある自然数 $r \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の点 $p \in M$ に対してそのまわりで \mathcal{D} を張る一次独立なベクトル場の組 X_1, \dots, X_m の r 回までのリーブラケットをとって得られるベクトル場たち,

$$X_1, \dots, X_m, [X_i, X_j], \dots, [X_{i_1}, [X_{i_2}, [\dots, [X_{i_{r-1}}, X_{i_r}] \dots]]]$$

$(i, j, \dots, i_1, \dots, i_r = 1, \dots, m)$ の点 $p \in M$ での値で張られる部分空間が接空間 $T_p M$ に一致するとき, \mathcal{D} はヘルマンダー条件を満たすという.

ヘルマンダー条件を満たす分布 \mathcal{D} に対して, 次の定理が知られている.

定理 5 (Chow-Rashevsky の定理 [1, 7]). M を n 次元連結多様体とする. 分布 \mathcal{D} がヘルマンダー条件を満たせば, d は有限の値をとり, M のもとの位相を与える.

次にサブリーマン多様体上の測地線に関する基本事項を述べる. (M, \mathcal{D}, d) 上の絶対連続曲線 $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ ($T > 0$ は実数) が最短線であるとは, ほとんどすべての $t \in [0, T]$ に対して $\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$ であって, $\int_0^T |\dot{\gamma}| dt = d(\gamma(0), \gamma(T))$ となることと定める. 絶対連続曲線 $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ が測地線であるとは, 任意の $t \in [0, T]$ に対してある $\epsilon > 0$ が存在して, $\gamma|_{[t-\epsilon, t+\epsilon] \cap [0, T]}$ が 2 点を結ぶ最短線となることとする. 絶対連続曲線 $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ の任意の部分曲線が距離 d に関して最短線になっているときに γ を直線という.

任意の点 $p_0 \in M$ に対して, p_0 から出発する絶対連続な曲線 $c : [0, T] \rightarrow M$ で, t の関数 $|\dot{c}(t)|$ が 2 乗可積分であるものの集合を $\Omega([0, T], p_0; \mathcal{D})$ と書く. このとき endpoint map $\text{end} : \Omega([0, T], p_0; \mathcal{D}) \rightarrow M$ を曲線 $c \in \Omega([0, T], p_0; \mathcal{D})$ に対して $\text{end}(c) := c(T)$ と定める. $\Omega([0, T], p_0; \mathcal{D})$ に適切な微分構造を入れることで endpoint map は可微分写像となる [7].

定義 6. endpoint map の臨界点となる曲線を *singular curve* といい, それが測地線であるときに *singular geodesic*, 最短線であるときに *singular minimizer* という.

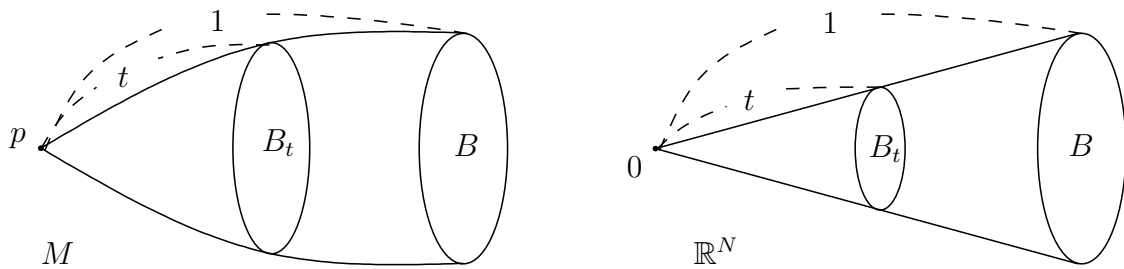
定値曲線は endpoint map の臨界点となるので, それ以外の臨界点を非自明な *singular curve* ということにする. サブリーマン多様体の測地線の中でも特に非自明な *singular minimizer* はふるまいが大変複雑 [7] で, 今のところよくわかっていないことが多いため, 本研究では (M, \mathcal{D}, d) は非自明な *singular minimizer* を含まないとする.

定義 7. ルベーク測度を備えたサブリーマン多様体 (M, d, μ) がある実数 $N \in [1, \infty)$ に対して **MCP(0, N) を満たす**とは, 任意の点 $p \in M$ と実数 $t \in [0, 1]$ とボレル集合 B に対して, B の各点を p までの最短線に沿って $(1-t) : t$ の内分点に移してできる集合を B_t としたときに,

$$\mu(B_t) \geq t^N \mu(B)$$

が成り立つことをいう.

MCP(0, N) の意味は $\mu(B_t)$ の収縮率が \mathbb{R}^N における体積の収縮率よりも小さくないということである.



MCP(0, N) はリーマン幾何学における Bishop-Gromov の不等式の一般化であり, n 次元リーマン多様体でリーマン体積とリーマン距離を考えれば, MCP(0, n) は非負リッチ曲率の条件と同値である [8].

一般に二つのサブリーマン多様体 $(M_1, \mathcal{D}_1, d_1), (M_2, \mathcal{D}_2, d_2)$ に対して, それらの直積多様体と分布の直和をとったもの $(M_1 \times M_2, \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2)$ を考えると, $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ はヘルマンダー条件を満たし, それが定める距離は d_1 と d_2 の直積距離となる. さらに [9] によると, measure contraction property を満たす二つの測度距離空間の直積をとって, それらの直積距離と直積測度を与えたものもまた measure contraction property を満たす.

定理 2 と定理 3 の仮定を満たすサブリーマン多様体の例として次の 3 次元のハイゼンベルグ群が知られている.

例 8. $M = \mathbb{R}^3$ 上の二つのベクトル場 $X_1 := (1, 0, -y/2), X_2 := (0, 1, x/2)$ をとって X_1, X_2 が生成する分布を \mathcal{D} とすると, \mathcal{D} はヘルマンダー条件を満たす. \mathcal{D} には X_1, X_2 が正規直交枠となるような正定値内積を与える. このようにして定められるサブリーマン多様体 (M, \mathcal{D}, d) を **3 次元のハイゼンベルグ群** という. \mathbb{R}^3 上の演算を

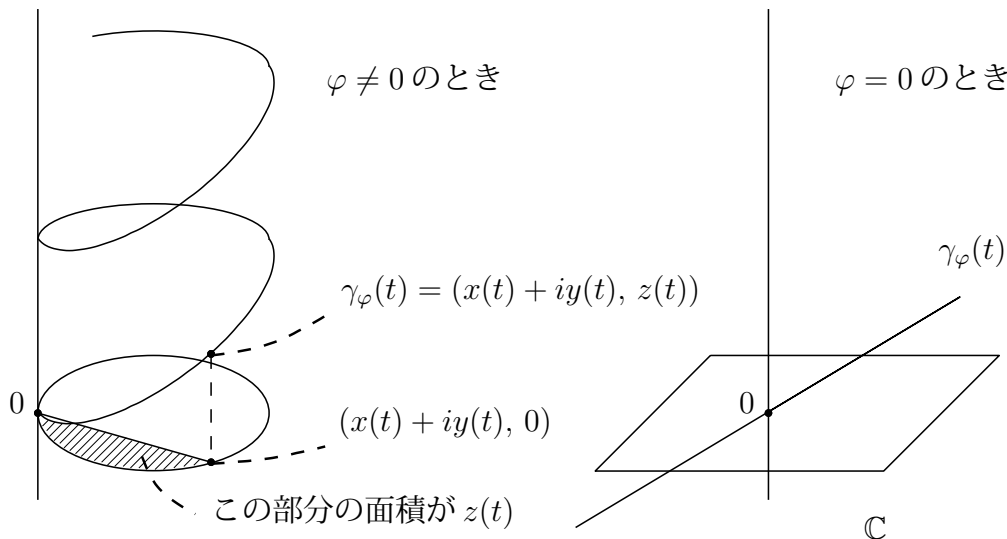
$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1))$$

と定めると M はリー群となり, d はこの演算に関して左不変となる. 3 次元のハイゼンベルグ群はリーマン多様体でないサブリーマン多様体の中でもっとも基本的でかつよく調べられているもので, 次のようにすべての測地線が具体的な式で書ける.

d が左不変距離であることから, 原点 $(0, 0, 0)$ から出発する測地線についてわかれば十分である. xy -平面を複素数平面 \mathbb{C} と同一視して $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ とみなすと, 原点 $(0, 0, 0)$ から初期速度 $(v, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ で出発する測地線 $\gamma_\varphi : \mathbb{R} \rightarrow M$ は, $\varphi \in \mathbb{R}$ を族のパラメーターとする分だけ存在し, 次のような式で書ける [5].

$$\gamma_\varphi(t) = \begin{cases} \left(v \cdot \frac{e^{i\varphi t} - 1}{i\varphi}, |v|^2 \left(\frac{\varphi t - \sin(\varphi t)}{2\varphi^2} \right) \right) & \varphi \neq 0 \text{ のとき} \\ (tv, 0) & \varphi = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

ただし演算 \cdot や絶対値 $|\cdot|$ は複素数平面のものとする. $\varphi \neq 0$ の式について φ を固定したとき, $\gamma_\varphi(t) = (x(t) + iy(t), z(t))$ とすると, 次の図のように $(x(t) + iy(t), 0)$ は複素数平面 \mathbb{C} 上の原点を通る円をえがき, $z(t)$ は原点と点 $(x(t) + iy(t), 0)$ を結ぶ線分と $(x(t) + iy(t), 0)$ がえがく円の弧とで囲まれる部分の面積に等しい.



$\varphi \neq 0$ のときは γ_φ はサブリーマン距離 d に関して直線にはならない. $(x(t) + iy(t), 0)$ が円周上を1回転した後に最短性が失われてしまうからである. 一方 $\varphi = 0$ のときは γ_φ は複素数平面上の原点を通る普通の意味の直線になるが, サブリーマン距離 d の意味でも直線になっている. これらの測地線はすべて非自明な singular minimizer でない. 3次元のハイゼンベルグ群は \mathbb{R}^3 のルベーク測度に関して MCP(0, 5) を満たす [5]. 3次元のハイゼンベルグ群は多様体としての次元は3だが, ハウスドルフ次元は4である [7].

このような例が存在することから, 非負リッチ曲率を持つリーマン多様体のクラスを, MCP(0, N) を満たす測度距離空間のクラスに広げると, 本質的にリーマン多様体と異なるものが含まれることがわかる.

注意 9. (1) 本研究の先行研究として, 桑江氏と塩谷氏によるアレクサンドロフ空間上の位相的分裂定理の研究 [6] がある. この論文では MCP(0, N) の仮定の下で, アレクサンドロフ空間に対しても Cheeger-Gromoll の分裂定理が弱い意味 (同相に分裂するという意味) で成り立つことが示されており, 等長に分裂すると予想されているが示されていない.

- (2) 定理 2 の証明は [6] に従っているが, 測地線のふるまいなどサブリーマン多様体特有の現象があるため, 本研究ではこれらについての相違点を埋めた. 定理 3 の証明には定義 4 のヘルマンダー条件を本質的に使う. 直感的には, ヘルマンダー条件によって分布 \mathcal{D} がねじれるため, 対応する距離空間もねじれてしまって, きれいに分裂しない, と解釈できる. しかし, サブリーマン多様体 (M, \mathcal{D}, d) と \mathbb{R} の直積サブリーマン多様体をとることで, $\text{MCP}(0, N)$ を満たしていても等長に分裂してしまう例を構成することができるので, 一般にサブリーマン多様体の等長的分裂について論じるのは難しいと思われる.

参考文献

- [1] André Bellaïche. The tangent space in sub-Riemannian geometry. In *Sub-Riemannian geometry*, volume 144 of *Progr. Math.*, pages 1–78. Birkhäuser, Basel, 1996.
- [2] Jeff Cheeger and Detlef Gromoll. The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature. *J. Differential Geometry*, 6:119–128, 1971/72.
- [3] Lars Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.*, 119:147–171, 1967.
- [4] K. Itoh. A topological splitting theorem for sub-Riemannian manifolds. *in preparation*, 2010.
- [5] Nicolas Juillet. Geometric inequalities and generalized Ricci bounds in the Heisenberg group. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (13):2347–2373, 2009.
- [6] K. Kuwae and T. Shioya. A topological splitting theorem for weighted Alexandrov spaces. *preprint*, 2009.
- [7] Richard Montgomery. *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, volume 91 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [8] Shin-ichi Ohta. On the measure contraction property of metric measure spaces. *Comment. Math. Helv.*, 82(4):805–828, 2007.
- [9] Shin-ichi Ohta. Products, cones, and suspensions of spaces with the measure contraction property. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 76(1):225–236, 2007.

Lie hypersurfaces in the complex hyperbolic space

濱田 龍義 (福岡大学/JST CREST)

1 序

本研究は広島大学の田丸博士氏、星川祐次氏との共同研究である。

非零な正則断面曲率を持つ複素空間型内の実超曲面は国内外の幾何学者によって盛んに研究されている。複素空間型は、正則断面曲率が正の場合に複素射影空間、負の場合には複素双曲空間となる。1970年代に R. Takagi によって複素射影空間内の等質実超曲面の分類が与えられた。1980年代半ばに M. Kimura によって、複素射影空間内の Hoph 実超曲面のうち、すべての主曲率が一定なものは、等質実超曲面と同値であることが示された。これらの成果は、その後の複素射影空間内の実超曲面の研究を進める上で重要な結果となった。1980年代後半に J. Berndt によって複素双曲空間内のすべての主曲率が一定な Hoph 実超曲面が決定されていたが、複素双曲空間内の等質実超曲面の研究については、長い間、未解決であった。このような歴史的経緯の中、1990年代終わりに M. Lohnherr によって発見された複素双曲空間内の極小 ruled 等質実超曲面の存在は驚きをもって迎えられた。この等質実超曲面は明らかに Hoph でないからである。その後、J. Berndt によって極小 ruled 等質実超曲面から horosphere への等質実超曲面の1媒介変数族が得られている。2007年になり、J. Berndt-H. Tamaru によって複素双曲空間内の等質実超曲面が完全に分類された。これらの研究により、複素双曲空間内と複素射影空間内の等質実超曲面の間の違いが明確になったが、その興味深い例の一つが複素双曲空間内だけに存在する Lie 実超曲面であり、J. Berndt によって得られた1媒介変数族である。

2008年のシンポジウムでは、複素空間型内の3次元実超曲面についての特殊性について述べたが、可解 Lie 環の性質を用いて複素双曲空間内の Lie 実超曲面の断面曲率について調べた結果、ここでも3次元実超曲面の特殊性が得られたことを報告する。

2 等質実超曲面について

$\mathbb{C}H^n$ 内の等質実超曲面についての結果を述べる。

Theorem 2.1 (Berndt-Tamaru, [3]). A hypersurface in $\mathbb{C}H^n$, where $n \geq 2$, is homogeneous if and only if it is congruent to one of the following hypersurfaces:

- (A) a tube around the totally geodesic $\mathbb{C}H^k$ for some $k = 0, \dots, n-1$,
- (B) a tube around the totally geodesic $\mathbb{R}H^n$,
- (N) a horosphere,
- (S) the homogeneous ruled minimal hypersurface or its equidistant hypersurfaces,

(W) a tube around the minimal ruled submanifold W_φ^{2n-k} .

ここで述べられている等質実超曲面のうち, (A), (B), (N) タイプについての研究は多くの研究者によって詳細に行われている. 一方, 本稿の主題である Lie 実超曲面は (N), (S) タイプに相当するが, Lie 実超曲面の外在的不変量については, J. Berndt ([1]) によって研究されている. 一方, 残る (W) タイプの外在的不変量については J. Berndt-J. C. Díaz-Ramos ([2]) によって研究された. 本稿では Lie 実超曲面, すなわち (N), (S) タイプの内在的不変量について述べる.

Lie 実超曲面は Lie 環の変形という立場からも興味深い [5]. Lie 実超曲面の族は可解 Lie 環から巾零 Lie 環への変形を与えている. Lie 実超曲面の曲率を計算することで, 変形に対応する曲率の挙動を調べたいと考えている.

3 複素双曲空間

$\mathbb{C}H^n$ の等質空間表示として以下を用いる.

$$\mathbb{C}H^n = \mathrm{SU}(1, n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n)),$$

$\mathbb{C}H^n$ の可解群モデルを考える. ここで $\mathbb{C}H^n$ の正則断面曲率を -1 と仮定する.

Definition 3.1. $(\mathfrak{s}, \langle, \rangle, J)$ が以下の条件を満たすとき複素双曲空間の可解群モデルと呼ぶ.

1. \mathfrak{s} が Lie 環で次の基底を持つ. $\{A_0, X_1, Y_1, \dots, X_{n-1}, Y_{n-1}, Z_0\}$

ここでブラケット積は以下のように与えられる.

$$[A_0, X_i] = (1/2)X_i, [A_0, Y_j] = (1/2)Y_j, [A_0, Z_0] = Z_0, [X_i, Y_i] = Z_0,$$

2. \langle, \rangle は \mathfrak{s} 上の内積であり, 上の基底は \langle, \rangle において正規直交基底となる.

3. J は \mathfrak{s} 上の複素構造で, 次のように与えられる.

$$J(A_0) = Z_0, J(Z_0) = -A_0, J(X_i) = Y_i, J(Y_i) = -X_i.$$

本稿では \mathfrak{s} に対応する単連結 Lie 群 S に所定の左不変リーマン計量と複素構造と合わせて可解群モデル $(\mathfrak{s}, \langle, \rangle, J)$ と同一視する.

可解群モデルとは, $\mathrm{SU}(1, n)$ の岩澤分解によって得られる可解部分にはかならない. 可解群モデルは自然に $\mathbb{C}H^n$ と同一視される. また, $(\mathfrak{s}, \langle, \rangle, J)$ の Damek-Ricci Lie 環である. 次のような分解を考える.

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}, \tag{3.1}$$

$$\text{ここで } \mathfrak{a} = \mathrm{span}\{A_0\}, \mathfrak{v} = \mathrm{span}\{X_1, Y_1, \dots, X_{n-1}, Y_{n-1}\}, \mathfrak{z} = \mathrm{span}\{Z_0\}.$$

$$[V, W] = \langle JV, W \rangle Z_0 \quad (\forall V, W \in \mathfrak{v}). \tag{3.2}$$

部分環 $\mathfrak{n} := [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$ は Heisenberg Lie 環となる.

(\mathfrak{s}, J) は normal j -algebra であり, 以下の関係式が得られる ([9]).

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{s}), \quad (3.3)$$

Damek-Ricci 空間について, よく知られている事実から次のような関係式が得られる [4]. $X, Y \in \mathfrak{s}$ とすると [7] より $(\mathfrak{s}, \langle, \rangle)$ の Levi-Civita 接続 $\nabla^{\mathfrak{s}}$ は次式で与えられる.

$$\nabla_X^{\mathfrak{s}} Y = (1/2)[X, Y] + U^{\mathfrak{s}}(X, Y), \quad (3.4)$$

ここで $U^{\mathfrak{s}} : \mathfrak{s} \times \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s}$ であり,

$$2\langle U^{\mathfrak{s}}(X, Y), Z \rangle = \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle \quad (\forall Z \in \mathfrak{s}). \quad (3.5)$$

(3.1) の分解により, Levi-Civita 接続を以下のように書き下すことができる.

Lemma 3.2. $X = a_1 A_0 + V + a_2 Z_0$, $Y = b_1 A_0 + W + b_2 Z_0$ とおく. ここで, $V, W \in \mathfrak{v}$ とする.

$$2\nabla_X^{\mathfrak{s}} Y = (\langle V, W \rangle + 2a_2 b_2) A_0 - b_1 V - a_2 J W - b_2 J V + (\langle J V, W \rangle - a_2 b_1) Z_0.$$

可解群モデルの曲率 $R^{\mathfrak{s}}$ を

$$R^{\mathfrak{s}}(X, Y) := \nabla_{[X, Y]}^{\mathfrak{s}} - [\nabla_X^{\mathfrak{s}}, \nabla_Y^{\mathfrak{s}}] = \nabla_{[X, Y]}^{\mathfrak{s}} - \nabla_X^{\mathfrak{s}} \nabla_Y^{\mathfrak{s}} + \nabla_Y^{\mathfrak{s}} \nabla_X^{\mathfrak{s}},$$

と定義すると, 以下の式が得られる.

Lemma 3.3.

$$4R^{\mathfrak{s}}(X, Y)Z = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y + \langle JY, Z \rangle JX - \langle JX, Z \rangle JY - 2\langle JX, Y \rangle JZ.$$

4 Lie 実超曲面

Lie 実超曲面を以下のように定義する.

Definition 4.1. A homogeneous hypersurface in the complex hyperbolic space is called a *Lie hypersurface* if it has no focal submanifolds.

以下の結果を紹介する.

Theorem 4.2 ([1]). Every Lie hypersurface in the complex hyperbolic space is isometrically congruent to the orbit $S(\theta).o$ for $\theta \in [0, \pi/2]$, where o is the origin and $S(\theta)$ is the connected Lie subgroup of S with Lie algebra

$$\mathfrak{s}(\theta) := \mathfrak{s} \ominus \mathbb{R}(\cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)A_0).$$

$\mathfrak{s}(\theta)$ は \mathfrak{s} の部分環となっており, 明らかに余次元 1 である.

したがって, $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ 内の Lie 実超曲面の法線ベクトルが得られ,

$$\xi := \cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)A_0$$

次のような分解を考えることができる.

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}(\theta) &= \text{span}\{T\} \oplus \text{span}\{Y_1\} \oplus \mathfrak{v}_0 \oplus \mathfrak{z}, \\ \text{where } T &:= \cos(\theta)A_0 - \sin(\theta)X_1, \quad \mathfrak{v}_0 := \text{span}\{X_2, Y_2, \dots, X_{n-1}, Y_{n-1}\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Lie 実超曲面は Lie 環の変形によって与えられる。これは可解 Lie 環 $\mathfrak{s}(0)$ から巾零 Lie 環 $\mathfrak{s}(\pi/2)$ への変形である。もし、 $\theta \neq \pi/2$ であるならば、 $\mathfrak{s}(\theta)$ は可解であり、巾零ではない。Lie 環 $\mathfrak{s}(\pi/2) = \mathfrak{n}$ は Heisenberg Lie 環と呼ばれるものである。

軌道 $S(0).o$ が極小 ruled 等質実超曲面であり ([6]), 軌道 $S(\pi/2).o$ が horosphere をあらわす。

$t > 0$ に対する軌道 $S(0).\gamma(t)$ のことを $S(0).o$ の等距離実超曲面と呼ぶ。ここで、 γ は o から $S(0).o$ に直行する方向へ伸ばされた測地線とする。等距離実超曲面は

$$S(0).\gamma(t) \cong (\gamma(t)^{-1}S(0)\gamma(t)).o = S(\theta).o$$

とあらわされる。

本稿では、以降簡単のため、 $S(\theta).o$ を $S(\theta)$ と書くことにする。

Lie 実超曲面 $S(\theta)$ の Levi-Civita 接続を ∇ 、第二基本形式を h とすると、

$$\nabla_X^{\mathfrak{s}} Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (4.2)$$

となるが、第二基本形式を先ほどの分解 (4.1) を用いて書き表すと、次の命題が得られる。

Proposition 4.3. Let $X, Y \in \mathfrak{s}(\theta)$ and write as $X = a_1T + a_2Y_1 + V + a_3Z_0$ and $Y = b_1T + b_2Y_1 + W + b_3Z_0$ for $V, W \in \mathfrak{v}_0$ according to the decomposition (4.1). Thus, the second fundamental form h satisfies

$$2h(X, Y) = ((\langle X, Y \rangle + a_3b_3) \sin(\theta) + (a_2b_3 + a_3b_2) \cos(\theta)) \xi.$$

Levi-Civita 接続 ∇ を、分解 (4.1) に対して書き表すと、次の命題が得られる。

Proposition 4.4. For the Lie hypersurface $S(\theta)$, we have

1. $\nabla_T T = 0, \nabla_T Y_1 = -(1/2) \sin(\theta) Z_0, \nabla_T V = 0, \nabla_T Z = (1/2) \sin(\theta) Y_1,$
2. $\nabla_{Y_1} T = -(1/2) \cos(\theta) Y_1 + (1/2) \sin(\theta) Z_0,$
 $\nabla_{Y_1} Y_1 = (1/2) \cos(\theta) T, \nabla_{Y_1} V = 0, \nabla_{Y_1} Z_0 = -(1/2) \sin(\theta) T,$
3. $\nabla_V T = -(1/2) \cos(\theta) V, \nabla_V Y_1 = 0,$
 $\nabla_V W = (1/2)[V, W] + (1/2) \cos(\theta) \langle V, W \rangle T, \nabla_V Z_0 = -(1/2) J V,$
4. $\nabla_{Z_0} T = (1/2) \sin(\theta) Y_1 - \cos(\theta) Z_0, \nabla_{Z_0} Y_1 = -(1/2) \sin(\theta) T,$
 $\nabla_{Z_0} W = -(1/2) J W, \nabla_{Z_0} Z_0 = \cos(\theta) T.$

4.1 Lie 実超曲面の断面曲率

Lie 実超曲面の断面曲率を求める。

Theorem 4.5. Let σ be a plane in $\mathfrak{s}(\theta)$ with an orthonormal basis $\{X, Y\}$. According to the decomposition $\mathfrak{s}(\theta) = \mathbb{R}T \oplus \mathbb{R}Y_1 \oplus \mathfrak{v}_0 \oplus \mathfrak{z}$ given in (4.1), we write

$$X = a_1T + a_2Y_1 + V + a_3Z_0, \quad Y = b_1T + b_2Y_1 + W + b_3Z_0.$$

Thus, the sectional curvature K_σ satisfies

$$K_\sigma = -(1/4) - (3/4) \langle JX, Y \rangle^2 + (1/4)(1 + a_3^2 + b_3^2) \sin^2(\theta) \\ + (1/2)(a_2a_3 + b_2b_3) \sin(\theta) \cos(\theta) - (1/4)(a_2b_3 - a_3b_2)^2 \cos^2(\theta).$$

まず, $n = 2$ の場合の断面曲率の最大値最小値を求める.

Corollary 4.6. Let $n = 2$. The sectional curvature K of the Lie hypersurface $S(\theta)$ in the complex hyperbolic plane $\mathbb{C}H^2$ satisfies

$$\begin{aligned}\max K_\sigma &= -\frac{1}{4} - \frac{3}{8} \cos^2(\theta) + \frac{1}{8} \sqrt{16 \sin^4(\theta) + 9 \cos^4(\theta) + 40 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)}, \\ \min K_\sigma &= -\frac{1}{4} - \frac{3}{8} \cos^2(\theta) - \frac{1}{8} \sqrt{16 \sin^4(\theta) + 9 \cos^4(\theta) + 40 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)}.\end{aligned}$$

一方, $n > 2$ の場合には次の結果が得られた.

Corollary 4.7. Let $n > 2$. Then the sectional curvature K of the Lie hypersurface $S(\theta)$ in the complex hyperbolic space $\mathbb{C}H^n$ satisfies

$$\max K_\sigma = -\frac{1}{4} + \frac{3}{8} \sin^2(\theta) + \frac{1}{8} \sin(\theta) \sqrt{\sin^2(\theta) + 4 \cos^2(\theta)}.$$

以上より, $\mathbb{C}H^n$ の複素次元が $n = 2$ の場合と $n > 2$ の場合とで, 断面曲率の最大値が異なるということが観察できる. $K_\sigma^{(n>2)}$, $K_\sigma^{(n=2)}$ をそれぞれの場合の断面曲率とすると, 以下の結果が得られる.

Proposition 4.8. We have $\max K_\sigma^{(n>2)} \geq \max K_\sigma^{(n=2)}$, and the equality holds if and only if $\theta = 0, \pi/2$.

参考文献

- [1] J. Berndt, Homogeneous hypersurfaces in hyperbolic spaces, *Math. Z.* **229** (1998), 589–600.
- [2] J. Berndt, and J. C. Díaz-Ramos, Homogeneous hypersurfaces in complex hyperbolic spaces, *Geom. Dedicata* **138** (2009), 129–150.
- [3] J. Berndt and H. Tamaru, Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one, *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), no. 7, 3425–3438.
- [4] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke, *Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces*, Lecture Notes in Mathematics, **1598**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [5] J. Lauret, Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups, *Differential Geom. Appl.* **18** (2003), no. 2, 177–194.
- [6] M. Lohnherr and H. Reckziegel, On ruled real hypersurfaces in complex space forms, *Geom. Dedicata* **74** (1999), 267–286.
- [7] J. Milnor, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, *Advances in Math.* **21** (1976), no. 3, 293–329.
- [8] R. Niebergall and P. J. Ryan, Real hypersurfaces in complex space forms, in: *Tight and taut submanifolds* (Berkeley, CA, 1994), 233–305, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **32**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [9] I. I. Pyateskii-Shapiro, *Automorphic functions and the geometry of classical domains*. Translated from the Russian. Mathematics and Its Applications, Vol. 8. Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris 1969.

Complete Submanifolds in a Manifold of Non-negative or Non-positive Curvature

Qiaoling Wang

Departamento de Matemática

Universidade de Brasília, Brasília-DF, Brazil

Abstract

We give conditions to insure that a complete submanifold in a complete Riemannian manifold of non-negative or non-positive curvature has only one end or finitely many ends.

リッチ流と第2種曲率作用素が正の多様体

横田 巧* (京大数理研)

与えられた n 次元リーマン多様体 (M^n, g_0) に対して、それを初期値とする次の偏微分方程式を考える：

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\text{Ric}(g(t)), \quad g(0) = g_0. \quad (1)$$

ここで、右辺の $\text{Ric}(g(t))$ はリーマン計量 $g(t)$ のリッチテンソルを表す。この方程式の解 $g(t), t \in [0, T)$ のことをリッチ流と呼ぶことにする。

次の方程式の解 $g(t), t \in [0, T)$ は正規化したリッチ流と呼ばれる：

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\text{Ric}(g(t)) + \frac{2s(t)}{n} g(t), \quad g(0) = g_0. \quad (2)$$

ここで、 $s(t) = \int_M \text{Scal}(\cdot, t) d\mu_{g(t)} / \text{Vol}(g(t))$ は $g(t)$ のスカラー曲率 $\text{Scal}(\cdot, t)$ の平均である。一般に、 $\frac{\partial}{\partial t} \text{Vol}(g(t)) = \frac{1}{2} \int_M \text{tr} \frac{\partial g}{\partial t} d\mu_{g(t)}$ であるから、正規化したリッチ流は体積 $\text{Vol}(g(t))$ を一定に保つ。そのため、考えたいのは正規化したリッチ流の方程式 (2) であるが、式が複雑であるので方程式 (1) を考える。実は (1) の解と (2) の解は時空のリスケールで互いに移りあえるので、どちらを考えても同じことになる。

閉多様体上で任意のリーマン計量を初期値とするリッチ流の短時間存在と一意性は、Hamilton [Ha1] により、Nash–Moser の陰関数定理を用いて示された（その後、その証明は簡略化された）。

リッチ流の応用の一つとして、次の微分同相版球面定理がある。

定理 1. (M^n, g_0) を“何らかの意味で正曲率”の閉多様体とする。このとき、正規化したリッチ流 $g(t)$ は $t \in [0, \infty)$ に対して存在し、 $t \rightarrow \infty$ で正定曲率計量に収束する。特に、多様体 M^n は球面の商 \mathbb{S}^n / Γ に微分同相である。

Hamilton はリッチ流を導入した論文 [Ha1] で、この球面定理を 3 次元でリッチ曲率が正の場合に示した。

一般にリッチ流は正曲率と相性が良く、リッチ流は様々な正曲率条件を保つことが知られている（このことに関して Wilking による統一的議論がある。[CT] の付録 B を参照のこと）。

上の定理に出てくる“何らかの意味で正曲率”を説明するために、少し準備をする。

定義 2. V を実ベクトル空間とする。次の性質を満たす曲率テンソル $R \in \oplus^4 V^*$ を考える：任意の $X, Y, Z, W \in V$ に対して、

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = R(Y, X, W, Z); \quad (3)$$

$$R(X, Y, Z, W) + R(X, Z, W, Y) + R(X, W, Y, Z) = 0. \quad (4)$$

式 (4) は (第 1) Bianchi 恒等式である。式 (3) と (4) から次が従う：

$$R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y). \quad (5)$$

*takumiy@kurims.kyoto-u.ac.jp

上の (3)、(4)、そして (5) を満たす曲率テンソル $R \in \oplus^4 V^*$ が与えられると、次の式により対称な曲率作用素 $\hat{R} : \Lambda^2 V \rightarrow \Lambda^2 V$ が定まる (e.g. 小林-野水 [KN]) :

$$\langle \hat{R}(X \wedge Y), Z \wedge W \rangle = R(X, Y, Z, W) \quad \forall X \wedge Y, Z \wedge W \in \Lambda^2 V.$$

曲率テンソル R は \hat{R} の他にも、次の対称な曲率作用素 $\mathring{R} : S^2 V \rightarrow S^2 V$ を定める :

$$\langle \mathring{R}(X \oplus Y), Z \oplus W \rangle = \frac{1}{2} [R(X, Z, W, Y) + R(Y, Z, W, X)] \quad \forall X \oplus Y, Z \oplus W \in S^2 V.$$

Bourguignon-Karcher [BK] に倣って、作用素 \mathring{R} を第 2 種曲率作用素と呼ぶことにする。

\hat{R} の固有値が正、つまり任意の $\omega \in \Lambda^2 V \setminus \{0\}$ に対して $\langle \hat{R}(\omega), \omega \rangle > 0$ のとき、 \hat{R} が正である ($\hat{R} > 0$) という。また、任意の $\zeta \in S^2 V \setminus \{0\}$ でそのトレース $\text{tr} \zeta$ が 0 のものに対して $\langle \mathring{R}(\zeta), \zeta \rangle > 0$ のとき、 \mathring{R} が正である ($\mathring{R} > 0$) という (e.g. [Ni])。

$\hat{R} > 0$ または $\mathring{R} > 0$ という曲率条件はどちらも断面曲率 $R(X, Y, X, Y)$ が正という条件よりも強い。

(M, g) がリーマン多様体であるとき、リーマン計量 g が各点 $p \in M$ の接空間 $T_p M$ に定める次の曲率テンソル $R_p \in \oplus^4 T_p^* M$:

$$R_p(X, Y, Z, W) = g_p(R(X, Y)W, Z)$$

(ただし、 $R(X, Y)W = \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X, Y]} W$) と、この R_p が定める作用素 $\hat{R}_p : \Lambda^2 T_p M \rightarrow \Lambda^2 T_p M$ と $\mathring{R}_p : S^2 T_p M \rightarrow S^2 T_p M$ を考える。

例 3. (S^n, g_S) を正定曲率球面としたとき、各点 $p \in S^n$ で \hat{R}_p 及び \mathring{R}_p は正である。 $(\mathbb{C}P^n, g_{FS})$ を複素射影空間としたとき、各点 $p \in \mathbb{C}P^n$ で \hat{R}_p は非負であるが、 \mathring{R}_p はそうではない ([BK])。

(第 1 種) 曲率作用素 \hat{R}_p が正の多様体については、次の結果が知られている。

定理 4 (Böhm-Wilking [BW], cf. Hamilton [Ha1, Ha2]). (M^n, g_0) を各点 $p \in M$ で曲率作用素 \hat{R}_p が正の閉多様体とする。このとき、正規化したリッチ流 $g(t)$ は $t \in [0, \infty)$ に対して存在し、 $t \rightarrow \infty$ で正定曲率計量に収束する。特に、多様体 M^n は球面の商 S^n/Γ に微分同相である。

$n = 3, 4$ の場合は Hamilton [Ha1, Ha2] による。Böhm-Wilking [BW] はそれを一般次元に拡張した。その後、Brendle-Schoen [BS] は断面曲率が $1/4$ -ピンチされた正曲率多様体の場合に拡張した。[BW] の証明については [v2-II]、[BS] の証明については [HA] に詳しく書かれている (はず)。

第 2 種曲率作用素が正の多様体の幾何学的性質については、荻上-立花 [OT]、柏田 [Ka] 等の貢献がある。

とりあえず、次が本講演の主結果である (cf. [Ni, Conjecture II])。

定理 5 (Y). (M^n, g_0) を各点 $p \in M$ で第 2 種曲率作用素 \mathring{R}_p が正の閉多様体とする。このとき、正規化したリッチ流 $g(t)$ は $t \in [0, \infty)$ に対して存在し、 $t \rightarrow \infty$ で正定曲率計量に収束する。特に、多様体 M^n は球面の商 S^n/Γ に微分同相である。

今のところ、定理 5 の証明は Böhm-Wilking [BW] や、その結果の拡張である Brendle-Schoen [BS] や Brendle [Br] による所がかなり大きい。

補足 6. 結局の所、 $\mathring{R} > 0$ という曲率条件が何を意味するのか、筆者はよく分かっていない。作用素 \mathring{R} は松島の消滅定理 [Ma] やその拡張の証明にも (記号は異なるが) 現れる (cf. [Iz, Na])。井関氏が論説 [Iz] で「松島の定理にコンセプトualな別証明を与えよ」という問題を提起しているが、この問題とも関係するかもしれない (しないかもしれない)。

参考文献

- [BK] J.-P. Bourguignon; H. Karcher, Curvature operators: pinching estimates and geometric examples. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4)* **11** (1978), no. 1, 71–92.
- [Br] S. Brendle, A general convergence result for the Ricci flow in higher dimensions. *Duke Math. J.* **145** (2008), no. 3, 585–601.
- [BS] S. Brendle; R. Schoen, Manifolds with $1/4$ -pinched curvature are space forms. *J. Amer. Math. Soc.* **22** (2009), no. 1, 287–307.
- [BW] C. Bohm; B. Wilking, Manifolds with positive curvature operators are space forms. *Ann. of Math. (2)* **167** (2008), no. 3, 1079–1097.
- [CT] E. Cabezas-Rivas; P. Topping, The Canonical Expanding Soliton and Harnack inequalities for Ricci flow. arXiv:0911.5036.
- [v2-II] B. Chow; S.-C. Chu; D. Glickenstein; C. Guenther; J. Isenberg; T. Ivey; D. Knopf; P. Lu; F. Luo; L. Ni. The Ricci flow: techniques and applications. Part II. Analytic aspects. *Mathematical Surveys and Monographs*, **144**. AMS, Providence, RI, 2008.
- [Ha1] R. Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.* **17** (1982), no. 2, 255–306.
- [Ha2] ———, Four-manifolds with positive curvature operator. *J. Differential Geom.* **24** (1986), no. 2, 153–179.
- [HA] C. Hopper; B. Andrews, The Ricci Flow in Riemannian Geometry. A complete proof of the differentiable $1/4$ -pinching sphere theorem. available at <http://www.maths.anu.edu.au/~andrews/book.pdf>.
- [Iz] 井関 裕靖, 調和写像と超剛性. 21 世紀の幾何学 幾何学の未踏峰, 168–182, 日本評論社, 2004.
- [Ka] T. Kashiwada, On the curvature operator of the second kind. *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.* **44** (1993), no. 2, 69–73.
- [KN] S. Kobayashi; K. Nomizu, Foundations of differential geometry. Vol. I. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.
- [Ma] Y. Matsushima, On the first Betti number of compact quotient spaces of higher-dimensional symmetric spaces. *Ann. of Math. (2)* **75** (1962), 312–330.
- [MM] M. Micalef; J. Moore, Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes. *Ann. of Math. (2)* **127** (1988), no. 1, 199–227.
- [Na] 納谷 信, 調和写像と剛性. 微分幾何学の最先端 *Surveys in Geometry*, special edition, 188–221, 培風館, 2005.
- [Ni] S. Nishikawa, On deformation of Riemannian metrics and manifolds with positive curvature operator. *Curvature and topology of Riemannian manifolds (Katata, 1985)*, 202–211, *Lecture Notes in Math.*, **1201**, Springer, Berlin, 1986.
- [OT] K. Ogiue; S.-i. Tachibana, Les varietes riemanniennes dont l’operateur de courbure restreint est positif sont des spheres d’homologie reelle. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B* **289** (1979), no. 1, A29–A30.

Second-order type-changing equations for a scalar function on a plane.

野田 尚廣（名古屋大学大学院多元数理科学研究科/OCAMI）

本講演の内容は、渋谷一博氏（広島大学）との共同研究によるものである。我々は、2変数1未知関数 $z := z(x, y)$ に対する2階の偏微分方程式系の中で、いろいろな意味での「特異性」を持つものに体系的な幾何学的解釈を与えることを目的として研究を行っている。今回は、「Type-changing equation」という2階の単独型方程式の特別なクラスに対する研究に関して得られた結果をお話ししたい。

まず、我々が扱う偏微分方程式を議論するために必要となるジェット空間を用意する。

$$J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) := \{(x, y, z, p, q, r, s, t)\} \cong \mathbb{R}^8. \quad (1)$$

ここで、 $J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ は自然な微分式系（接束の部分束） $C^2 := \{\varpi_0 = \varpi_1 = \varpi_2 = 0\}$ を持つ。ただし、generator 1-form は、

$$\begin{aligned} \varpi_0 &:= dz - p dx - q dy, \\ \varpi_1 &:= dp - r dx - s dy, \\ \varpi_2 &:= dq - s dx - t dy, \end{aligned}$$

で与えられるものとする。この空間の上で、関数 $F \in C^\infty(J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ をとることにより、単独型2階の偏微分方程式が

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad (2)$$

と与えられる。この方程式 $F = 0$ に関して、次の regularity condition を仮定しよう。

$$(F_r, F_s, F_t) \neq (0, 0, 0). \quad (3)$$

この時、方程式が定義する集合

$$\Sigma := \{F = 0\} \subset J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$$

はジェット空間の(滑らかな)超曲面を与える. また, 自然な射影 $\pi: J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \rightarrow J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ の超曲面への制限 $\pi|_{\Sigma}$ は沈めこみ (i.e. 微分写像は全射) になる. この事実から, 先程の微分式系 C^2 をこの超曲面 Σ に制限すると, それもまた微分式系となる. これを, $D := \{\varpi_0|_{\Sigma} = \varpi_1|_{\Sigma} = \varpi_2|_{\Sigma} = 0\}$ で表そう. D は Σ 上の rank 4 のベクトル束である.

Remark 0.1

これ以降, 制限記号 $|_{\Sigma}$ は省略する.

このような対応から, regularity condition (3) を満たす単独型方程式 (2) に対しては, その幾何学的対象物として微分式系 (Σ, D) を考える. 実際, 方程式系 (2) の接触変換 (J^2 上の C^2 を保つ微分同相) による局所同値性 (方程式どうしが移りあえる) は対応する微分式系 (Σ, D) のベクトル束としての局所同型性で置き換えられ, また (2) の解のグラフは, 微分式系の積分多様体としてとらえられるといった基本性質から, この見方は妥当である. したがって, 微分式系の不変的な構造を調べることで方程式系に対する体系的解釈を与えることが (大雑把な言い方だが) モチベーションともいえる.

さて, 単独型方程式 $F = 0$ に対しては判別式

$$\Delta := F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2, \tag{4}$$

という概念が存在する. この関数の符号を用いて, Σ 上の点 v は各々,

- v は楕円点 for $\Delta(v) > 0,$
- v は双曲点 for $\Delta(v) < 0,$
- v は放物点 for $\Delta(v) = 0,$

と呼ばれる. ここで, v が双曲点, あるいは楕円点なら, v の十分小さい近傍 U をとれば, 判別式 Δ の連続性から U 上の点は同じく双曲点, あるいは楕円点となる. 従って, 双曲性と楕円性は局所的な性質として拡張できる. 一方, v が放物点の時は一般にはこのようなことは保障されない. 理由は, 判別式から容易にわかるように, v の近傍をどんなに小さくとってもその中に, $\Delta(w) \neq 0$ なる点 w が現れる可能性があるからである. このような現象を引き起こす二階の方程式 (2) を [3] に習い, second-order type-changing equation と呼ぶ事にする. より明確に定義するために, 次の集合 Σ_p を考えよう.

$$\Sigma_p := \Sigma \cap \{\Delta = 0\}.$$

これは Σ_p の中で放物点全体がなす部分集合を指す. このとき定義から, 次を得る.

$\Sigma_p = \Sigma \iff$ (局所) 放物型, $\Sigma_p = \phi \iff$ 双曲型 or 楕円型.

この事実から type-changing equation を次のように定めることができる.

Definition 0.2

2階の regular PDE Σ に対し, 部分集合 Σ_p が Σ の真の部分集合 ($\phi \subsetneq \Sigma_p \subsetneq \Sigma$) となる時, Σ を type-changing equation と呼ぶ.

これまでの準備のもとで, 以下のことがわかった.

- (1) Type-changing equation を粗く分類し, 各クラスの例を構成した.
- (2) その中のひとつのクラスに対して, 解の存在に対する十分条件を得た.

さて, 放物型方程式の標準形としては, $r = 0$ があるが, この方程式を $r = f(x, y, z, p, q, s, t)$ と変形しただけで, これ以降の議論でも出てくるが, type-changing equation の具体例が豊富に現れる. さらに, 陰関数定理と接触変換を組み合わせる事で, 実はすべての regular PDE (Type-changing 以外のものも) が, $r = f(x, y, z, p, q, s, t)$ と書ける. この場合, 判別式は $\Delta = -(f_t + \frac{1}{4}f_s^2)$ となるので, $\Sigma_p = \{f_s^2 + 4f_t = 0\}$ と代数的に記述できる. このまわりの局所的な振る舞いをなんとか調べたいというわけである.

Type-changing equation を微分式系の観点から調べるために, 次の本質的な仮定をおく.

Assumption 0.3

Σ_p は Σ の部分多様体になる.

一般に, Σ_p に関しては, 大きく分けて次の2つのケースがある.

$$(A) \ d\Delta \neq 0 \text{ on } \Sigma_p, \quad (B) \ d\Delta = 0 \text{ on } \Sigma_p.$$

(A) のケースに関しては, 次がいえ:

Proposition 0.4

2階の regular PDE $\Sigma = \{F = 0\}$ に対し, $dF, d\Delta$ が一次独立ならば, Σ は type-changing PDE であり, Σ_p は Σ の smooth hypersurface となり, そのまわりの型は双曲点と楕円点両方が混在するものである.

(A) のケースにおいてはこのようにある程度見通しがつくが, 問題は (B) のケースである. この場合が大きく退化する場合であるが, 実際に次元に関しては $\dim \Sigma_p = i$ for $0 \leq i \leq 6$ を満たす例が存在する. (ただし, 0次元の場合, Σ_p は基点 w_0 のみを指す.) 上の命題と合わせて次を得る.

Theorem 0.5

Σ を *type-changing equation* で Σ_p が部分多様体とすると, Σ は以下のいずれかのケースに属する.

(A) $d\Delta \neq 0$ on Σ_p , Σ_p を境界に双曲型と楕円型が混在する.

(B) $d\Delta = 0$,

(B-i) $\dim\Sigma_p=6$

(B-i-i) Σ_p のまわりが両方双曲型,

(B-i-ii) Σ_p のまわりが両方楕円型,

(B-i-iii) Σ_p を境界に双曲型と楕円型が混在する.

(B-ii) $\dim\Sigma_p \leq 5$

(B-ii-i) Σ_p のまわりが両方双曲型,

(B-ii-ii) Σ_p のまわりが両方楕円型.

Proposition 0.6

上記の各々のクラス全てに対して, 具体例が存在する.

次に二階の regular PDE に対する解の概念について定義する.

Definition 0.7

(Σ, D) を *second order regular PDE* とする. Σ の 2次元部分多様体 $L \subset \Sigma$ s.t. $TL \subset D$ に対し, 自然な射影 $\pi: J^2 \rightarrow J^1$ の L への制限が L の *open dense subset* 上ではめ込みになるとき, L を (Σ, D) の (二階の意味での) 解といい, はめ込みでない点を持つようなものを特異解と呼ぶ. 特に, (Σ, D) が *type-changing equation* の時に解が Σ_p に含まれるならば, その解を放物解と呼ぶことにする.

今回は *Type-changing equation* を考えているため, 特に放物解に関して考察した. その考察に触れるため, regular な過剰決定系を定義しておく.

Definition 0.8

過剰決定系 $\Sigma_p = \{F = G = 0\}$ に対して, (F_r, F_s, F_t) と (G_r, G_s, G_t) が一次独立となるなら, Σ_p を *regular* という.

ケース (A) の方程式系 Σ に対しては, さらに判別式が $(\Delta_s, \Delta_t) \neq (0, 0)$ を満たす場合, Σ_p はそれ自身二階 PDE の regular な過剰決定系となる. 何故この過剰決定系を考えるかということであるが, 理由は端的に言えば, 「 Σ_p の解を構成できればそれはもとの Σ の放物解になる」からである. したがって, regular な過剰決定系 Σ_p に関する解の存在またはその構成に話

は移るが, この話題に関しては E.Cartan による構造方程式 (微分不変式論) を用いた微分式系の研究の中で「involutive」という概念によってこの解の存在条件が与えられている ([Car]). したがって, いつ type-changing Σ に対応する regular な過剰決定系 Σ_p が involutive となるかを調べることになるが, それは以下で与えられる.

Theorem 0.9

$\Sigma = \{r = f(x, y, z, p, q, s, t)\}$ を type-changing equation とし, $\Sigma_p = \{r = f, \Delta = 0\}$ を付随する regular な過剰決定系とする. その時, (Σ_p, D_p) が involutive system であるための必要十分条件は, 局所的に次が成り立つことである.

$$\Delta_s \neq 0, b = -c^2, a + ce = 0.$$

ここで,

$$a := \frac{df}{dy} - \frac{f_s}{\Delta_s} \frac{d\Delta}{dy} + \frac{1}{\Delta_s} \frac{d\Delta}{dx}, \quad b := \frac{f_s \Delta_t - f_t \Delta_s}{\Delta_s}, \quad c := \frac{\Delta_t}{\Delta_s}, \quad e := -\frac{1}{\Delta_s} \frac{d\Delta}{dy}.$$

特に, このとき type-changing equation Σ は放物解を持つ.

参考文献

- [1] R. Bryant, S. S. Chern, R. Gardner, H. Goldschmidt, P. Griffiths, Exterior Differential Systems, MSRI Publ. vol. **18**, Springer Verlag, Berlin (1991).
- [2] E. Cartan, Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre, Ann. École Normale, **27** (1910), 109–192.
- [3] J. Clelland, M. Kossowski, G.R. Wilkens, Second-order type-changing evolution equations with first-order intermediate equations, J. Differential Equations, 244, (2008) no.2, 242–273.
- [4] K. Yamaguchi, Contact geometry of higher order, Japan. J. Math., **8** (1982), 109–176.
- [5] K. Yamaguchi, Contact geometry of second order I, Hokkaido university preprint series in mathematics No. 927

1 変数複素微分同相群の語の問題

柳井 佳奈 (yanai.kana@ocha.ac.jp)

1 1 変数複素微分同相群

微分方程式 $\frac{dz}{dt} = f(t, z)$ を考える. ここで, $t, z \in \mathbb{C}$, $f(t, z)$ は \mathbb{C}^2 のある領域で正則とする. $z(0) = z_0$ とおき, $f(t, 0) = 0$ と仮定すると, その解 $z(t)$ は, $t = 0$ の周りで一意に存在し, z_0 に関する冪級数展開 $a_1(t)z_0 + a_2(t)z_0^2 + \dots + a_n(t)z_0^n + \dots$ を持つ. 1 変数形式的微分同相写像とは, z の形式的冪級数 $a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots$, $a_1 \neq 0$ のことをいう. これらの全体は写像の合成 \circ を演算として群をなし, $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ で書かれる. この群の元のうち収束半径を持つものは, 原点の周りの原点を固定する正則関数芽を与え, それら全体はその部分群をなす. この群を $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ と書き, 1 変数複素微分同相群という. この群の単位元は恒等写像であり, これを id で表す: $id: z \mapsto z$. 特に, z の係数が 1 である元を id に接するという. $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ の 2 元 $f = f_1, g = f_2$ の語 $W(f, g) = f_{i_1}^{m_1} \circ f_{i_2}^{m_2} \circ \dots \circ f_{i_l}^{m_l}$, $i_k \in \{1, 2\}, m_k \in \{-1, 1\}$ がいつ (どんな f, g に対し, どんな語に対し) 空語 id と同じかという問題を考える. 関連問題として, Abel 微分方程式の周期解に関する問題がある ([1, 2, 10]).

$\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ の元 f と g が可換なとき: $f \circ g = g \circ f$, ペア (f, g) は可換であるという. また, (f, g) が次数 k の初等的なペアであるとは, f, g のある $\phi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ による共役 $\phi^{-1} \circ f \circ \phi, \phi^{-1} \circ g \circ \phi$ が, とともに次のどちらかの $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ の部分群の元のときにいう.

- $G_a(k) = \{\alpha \exp(t \frac{z^{k+1}}{1+z^k} \partial_z) z \mid \alpha^k = 1, t \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{Z}_k \times \mathbb{C}$ (可換)
- $G_s(k) = \{\alpha \exp(t z^{k+1} \partial_z) z \mid \alpha \in \mathbb{C}^*, t \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ (非可換, 長さ 2 の可解群)

ここで, $\exp(t\chi)z$ は複素ベクトル場 χ のフローを表す. 後者の元は, $\alpha \exp(t z^{k+1} \partial_z) z = \alpha z + \alpha t z^{k+1} + \frac{\alpha(k+1)t^2}{2} z^{2k+1} + \dots = \frac{\alpha z}{\sqrt[k]{1-ktz^k}}$ という形である. $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ の有限生成 (非可換な) 可解部分群は, ある k に対して $G_s(k)$ に形式的に同値であることが知られている ([11]). また, $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ の元 f の k -ジェットとは, その k 次多項式部分のことをいい, これを $J^k f(0)$ と書く. 2 元 f, g に対し, $(J^k f(0), J^k g(0))$ をペア (f, g) の k -ジェットと呼ぶ. (f, g) の k -ジェットが, 可換なペアのそれに等しいとき, (f, g) は可換な k -ジェットを持つといい, 初等的なペアのそれに等しいとき, (f, g) は初等的な k -ジェットを持つという.

2 折れ線図形と特性曲線

$\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ の 2 元 f, g に対し, それぞれ実平面 $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$ の x, y 軸正の方向の単位ベクトル H, V を対応させ, f, g の逆元 f^{-1}, g^{-1} にはそれぞれ逆向きベクトル H^{-1}, V^{-1} を対応させる. f, g の語に対し, 語の合成の順番に原点を始点にこれらのベクトルを対応させていき, $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$ に有向連続折れ線を描く. 逆に, そのような折れ線 γ に f, g の語が対応する. これを $W_\gamma(f, g)$ と書く. 閉じた折れ線図形 γ に対し, ローラン多項式 $P_\gamma(X, Y)$ を $P_\gamma(X, Y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \rho_{ij} X^i Y^j$ により定義する. ここで ρ_{ij} は単位正方形領域 $(i, i+1) \times (j, j+1)$ 内の一点を γ が巻く回数を表す. 複素変数 X, Y に対し, 方程式 $C_\gamma^k: P_\gamma(X^k, Y^k) = 0$ が \mathbb{C}^2 の平面曲線を定めるとき, これを γ の第 k -特性曲線と呼ぶ. ある $(\alpha_2, \beta_2) \neq (0, 0) \in \mathbb{C}^2$ に関するケーリー図形の第 j モーメントを, $\text{Moment}_j(\gamma) = \iint \rho(\alpha_2 x + \beta_2 y)^j dx \wedge dy$ により定義する. ここで \iint は \mathbb{R}^2 上の (ルベグ) 積分, $\rho = \rho(x, y)$ は \mathbb{R}^2 の一点 (x, y) を γ が

巻く回数を表す. 閉じた折れ線図形 γ に対し, $(\alpha_2, \beta_2) \neq (0, 0)$ に関して $p(\geq 0)$ 次モーメント条件が成り立つとは, $\text{Moment}_0(\gamma) = \cdots = \text{Moment}_{p-1}(\gamma) = 0, \text{Moment}_p(\gamma) \neq 0$ が成り立つときにいう.

平面曲線 $C : P(X, Y) = 0$ が, $(X, Y) = (a, b)$ で滑らかとは $(\frac{\partial P}{\partial X}(a, b), \frac{\partial P}{\partial Y}(a, b)) \neq (0, 0)$ のときにいい, このとき, (α, β) が (a, b) で C に接するとは, $\alpha \frac{\partial P}{\partial X}(a, b) + \beta \frac{\partial P}{\partial Y}(a, b) = 0$ のときにいう. また, 通常二重特異点を持つとは, $(\frac{\partial P}{\partial X}(a, b), \frac{\partial P}{\partial Y}(a, b)) = (0, 0)$ かつ $\det \text{Hessian} P(a, b) \neq 0$ のときにいい, このとき, (a, b) における接錐とは $\alpha^2 \frac{\partial^2 P}{\partial X^2}(a, b) + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y}(a, b) + \beta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2}(a, b) = 0$ を満たす (α, β) の集合のことである.

3 主結果

定理 1 ([6]). γ を閉じた折れ線図形, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$, $\alpha^k \neq 1 (k = 1, 2, \dots)$ または $\beta^k \neq 1 (k = 1, 2, \dots)$ とする. このとき, $W_\gamma(f, g) = id$ の $(f'(0), g'(0)) = (\alpha, \beta)$ である解 (f, g) について次が成り立つ.

- (1) すべての $k = 1, 2, \dots$ に対して $(\alpha, \beta) \notin C_\gamma^k$ ならば, 可換, 特に $(\alpha z, \beta z)$ に形式的に共役である.
- (2) ある l に対して $(\alpha, \beta) \in C_\gamma^l$ かつ $(\alpha, \beta) \notin C_\gamma^k, k \neq l$ ならば, 解の集合は次からなる.
 - ・すべての可換なペア
 - ・次数 l のすべての非可換な初等的なペア.
- (3) $(\alpha, \beta) \in \bigcap_{\substack{k=l_1, \dots, l_n \\ 1 \leq l_1 < \dots < l_n}} C_\gamma^k \setminus \bigcup_{k \neq l_1, \dots, l_n} C_\gamma^k$ ならば, 解の集合は次からなる.
 - ・すべての可換なペア
 - ・次数 $l_i, i = 1, 2, \dots, n$, のすべての非可換な初等的なペア
 - ・可換な l_i -ジェットを持つ, 初等的でない (形式的) ペア

定理 2 ([6]). γ を閉じた折れ線図形とする. このとき, $W_\gamma(f, g) = id$ の解 (f, g) で, f, g ともに id に接し $A_2 = (f''(0), g''(0)) \neq (0, 0)$ であるものについて次が成り立つ.

1. 特性曲線 C_γ が $(1, 1)$ で滑らかなとき
 - (1) A_2 が $(1, 1)$ で C_γ に接しないならば, 可換.
 - (2) A_2 が $(1, 1)$ で C_γ に接し, A_2 に関してモーメント条件が成り立たないならば, 可換.
 - (3) A_2 が $(1, 1)$ で C_γ に接し, A_2 に関して p 次モーメント条件がある $p \geq 2$ に対して成り立つならば, 初等的でない (形式的).
2. 特性曲線 C_γ が $(1, 1)$ で通常二重特異点を持つとき
 - (1) A_2 が $(1, 1)$ における C_γ の接錐に含まれないならば, 可換.
 - (2) A_2 が $(1, 1)$ における C_γ の接錐に含まれ, A_2 に関してモーメント条件が成り立たないならば, 可換.
 - (3) A_2 が $(1, 1)$ における C_γ の接錐に含まれ, A_2 に関して p 次モーメント条件がある $p \geq 3$ に対して成り立つならば, 初等的でない (形式的).
3. 特性曲線 C_γ が $(1, 1)$ で $(2, 3)$ 型のカusp特異点を持つとき, 可換.

定理 2, 2. (3) の条件を満たす折れ線と A_2 の具体例は [9] で求められている.

4 Chacon-Fomenko の解の公式

有限正方行列 $X(t)$ に関する常微分方程式 $\frac{dX}{dt} = \lambda K(t)X(t), 0 \leq t \leq 1$ の解の公式がある ([3]). ここで, $K(t), 0 \leq t \leq 1$, はリーマン積分可能な有限正方行列, λ は定数である. 実際, この解は, $X(t) = e^{L \int_0^t \lambda K(s) ds} X(0)$ で与えられる. ここで, $L \int_0^t \lambda K(s) ds$ は, $\lambda = 0$ でのマクローリン展開 $L \int_0^t \lambda K(s) ds = \lambda H_1[t] + \lambda^2 H_2[t] + \lambda^3 H_3[t] + \dots$ の係数 $H_k[t] (k > 1)$ が漸化式 $H_1[t] = \int_0^t K(s) ds = T_0[t]$,

$$(k+1)H_{k+1}[t] = T_k + \sum_{r=1}^k \left(\frac{1}{2} [H_r, T_{k-r}] + \sum_{\substack{p \geq 1 \\ 2p \leq r}} k_{2p} \sum_{\substack{m_i > 0 \\ m_1 + \dots + m_{2p} = r}} [H_{m_1}, [\dots, [H_{m_{2p}}, T_{k-r}] \dots]] \right)$$

で与えられる行列であり, その各成分は λ が十分小さければ収束する. ここで, $(-1)^{p-1} (2p)! k_{2p} = B_p$ はベルヌーイ数, T_k は次のような $k+1$ -単体上の重積分である:

$$T_k = T_k[t] = \int_{0 \leq u_{k+1} \leq \dots \leq u_2 \leq u_1 \leq t} \dots \int du_1 du_2 \dots du_{k+1} [\dots [K(u_1), K(u_2)], \dots], K(u_{k+1})] \quad (k \geq 1). \quad (1)$$

例えば, $H_2[l] = \frac{1}{2} T_1[l] = \frac{1}{2} \iint_{0 \leq u \leq s \leq l} ds du [K(s), K(u)], H_3[l] = \frac{1}{3} T_2[l] + \frac{1}{6} [T_0[l], H_2[l]]$ など.

この公式の背景には, Campbell-Baker-Hausdorff の公式がある ([7, 3]).

以下, 定数項のない 1 変数形式的ベクトル場のなすり一環を $\hat{\chi}(\mathbb{C}, 0)$ とする. $K(t) = \hat{f}(t, z) \partial_z = (a_1(t)z + a_2(t)z^2 + \dots + a_n(t)z^n + \dots) \partial_z$ を $\hat{\chi}(\mathbb{C}, 0)$ に値を持つ $t, 0 \leq t \leq l$, の区分的に滑らかな関数とする. このとき, 常微分方程式 $\frac{dz}{dt} = \hat{f}(t, z) \partial_z z = \hat{f}(t, z)$ の解は, $z(t) = \exp(L \int_t^0 -K(s) ds) z(0)$ で与えられる ([8]). ここで,

$$L \int_t^0 -K(s) ds = H_1[t] - H_2[t] + \dots + (-1)^{n-1} H_n[t] + \dots \quad (2)$$

である. 形式的ベクトル場 $K(t)$ は微分作用素として線形性を持つため, 適当な基底 (例えば $z \partial_z, z^2 \partial_z, \dots, z^n \partial_z, \dots$) により, 無限次元行列によって表現されることに注意したい.

5 Chen の反復積分に対する公式

$a(z) \partial_z, b(z) \partial_z \in \hat{\chi}(\mathbb{C}, 0), \gamma = (x(t), y(t)), 0 \leq t \leq l$, を \mathbb{R}^2 の区分的に滑らかな道とする. (1) に $K(t) = a(z) \partial_z \frac{dx}{dt} + b(z) \partial_z \frac{dy}{dt}$ を代入すると, Chen の反復積分の形になる. 例えば,

$$\iint_{0 \leq u \leq s \leq l} ds du [K(s), K(u)] = [a(z) \partial_z, b(z) \partial_z] \iint_{0 \leq u \leq s \leq l} ds du \left(\frac{dx}{ds} \frac{dy}{du} - \frac{dx}{du} \frac{dy}{ds} \right)$$

であり, 右辺の積分部は Chen の記号で $\int_{\gamma} dx dy - dy dx$ と書かれる. 一般に,

定義 1 ([4]). $\omega_1, \dots, \omega_s$ を多様体 M 上の 1-微分形式, $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ を M 上の区分的滑らかな道とする. γ による ω_i の引き戻し $\gamma^* \omega_i$ を $f_i(t) dt$ と書く. このとき, $f_1(t_1) \dots f_s(t_s) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_s$ の s -単体 $\Delta_s = \{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_s \leq 1\}$ 上の重積分を $\int_{\gamma} \omega_1 \dots \omega_s$ で表し, Chen の反復積分という.

Shuffle 公式 ([5]) と Green-Stokes の定理を使うことにより, 次の公式を得る.

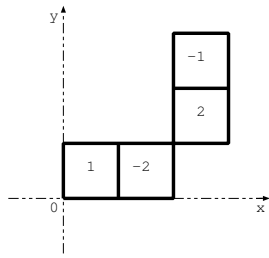
Lemma 5.1 ([6]). $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ を原点を始点に持つ区分的に滑らかな閉じた道とし, $K_i = a_i x + b_i y, a_i, b_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, 3, 4$, を複素数に値を持つ \mathbb{R}^2 上の線形関数とすると,

1. $\int_{\gamma} [dK_1, dK_2] = 2 \iint \rho dK_1 \wedge dK_2,$
2. $\int_{\gamma} dK_1 [dK_2, dK_3] = 3 \iint \rho K_1 dK_2 \wedge dK_3,$
3. $\int_{\gamma} dK_1 dK_2 [dK_3, dK_4] = 2 \iint \rho K_1 K_2 dK_3 \wedge dK_4 + \iint \rho dK_1 \wedge dK_2 \iint \rho dK_3 \wedge dK_4,$
4. $\int_{\gamma} dK_1^s [dK_1, dK_2] = \frac{s+2}{s!} \iint \rho K_1^s dK_1 \wedge dK_2,$

ここで, $[dK_i, dK_j] = dK_i dK_j - dK_j dK_i, dK_1^s = \overbrace{dK_1 \cdots dK_1}^s$ を表す. また, 外微分の計算をすると, 例えば $dK_1 \wedge dK_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} dx \wedge dy$ となる.

例 1. γ を以下の図を巻き数関数のサポートに持つような原点を始点とする閉じた折れ線図形とする. Lemma 5. 1 より, $\int_{\gamma} [dx, dy] = 2 \iint \rho dx \wedge dy = 2(1 - 2 + 2 - 1) = 0,$

$$\begin{aligned} \left(\int_{\gamma} dx [dx, dy], \int_{\gamma} dy [dx, dy] \right) &= 3 \left(\iint \rho x dx \wedge dy, \iint \rho y dx \wedge dy \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{5}{2} - \frac{5}{2}, \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \right) = (0, 0). \end{aligned}$$



$\iint \rho dx \wedge dy, (\iint \rho x dx \wedge dy, \iint \rho y dx \wedge dy)$ はそれぞれ γ の巻き数関数のサポートの (符号付き) 面積, 重心を与える. そこで, これらを $Area(\gamma), G(\gamma)$ で表す.

6 語の対数の係数

id に接する $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ の元は, テイラー展開が z^2 の項から始まる形式的ベクトル場のフロアである. id に接する $f, g \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ に対し, $f = \exp(\tilde{a}(z)\partial_z)z, g = \exp(\tilde{b}(z)\partial_z)z, \tilde{a}(z) = a_2 z^2 + \cdots, \tilde{b}(z) = b_2 z^2 + \cdots$ とする. このとき, 微分方程式 $\frac{dz}{dt} = m_{i_{l-j+1}} \tilde{a}_{i_{l-j+1}}(z), t \in [j-1, j], j = 1, \dots, l, \tilde{a}_1 = \tilde{a}, \tilde{a}_2 = \tilde{b}$ の解 $z(t)$ の $t = l$ における値 $z(l)$ は $W(f, g)(z(0)) = f_{i_1}^{m_1} \circ f_{i_2}^{m_2} \circ \cdots \circ f_{i_l}^{m_l}(z(0)), i_k \in \{1, 2\}, m_k \in \{-1, 1\}$ である. 一方, この微分方程式は, $\frac{dz}{dt} = \tilde{a}(z)\frac{dx}{dt} + \tilde{b}(z)\frac{dy}{dt}$ の語に対応する折れ線 $\gamma = (x(t), y(t)), 0 \leq t \leq l$, \hbar の制限とも言える. 4節にあるように, この解は, $z(l) = \exp(L \int_l^0 -K(s)ds)z(0), K(s) = \tilde{a}(z)\frac{dx}{ds} + \tilde{b}(z)\frac{dy}{ds}$ で与えられるので, $W(f, g) = id$ と $L \int_l^0 -K(s)ds = 0\partial_z$ が同値である. $L \int_l^0 -K(s)ds$ の形式的ベクトル場としてのテイラー展開の k 次の係数 L_k を, (1), (2) から計算すると, γ が原点を始点とし閉じていれば, $k = 4, 5, 6, 7$ のとき, 次のようである ([8]). ここで \cdot はベクトルの”内積”を表す.

$$L_4 = - \iint \rho dK_2 \wedge dK_3 = -|A_2 A_3| Area(\gamma),$$

$$L_5 = \iint \rho K_2 dK_2 \wedge dK_3 = 2|A_2 A_3| A_2 \cdot G(\gamma) \pmod{Area(\gamma)},$$

$$L_6 = \iint \rho (K_3 - 3K_2^2) dK_2 \wedge dK_3 \pmod{Area(\gamma)}, A_2 \cdot G(\gamma),$$

$$L_7 = 4 \iint \rho (K_2^3 - K_2 K_3) dK_2 \wedge dK_3 \pmod{Area(\gamma)}, A_2 \cdot G(\gamma), \iint \rho (K_3 - 3K_2^2) dx \wedge dy.$$

さらに, 一般に L_k も得られている ([6]). これらはもちろん, 一般に原点を始点とする閉じた道 γ に対して成り立つ.

定理 2 の証明は, この計算結果をみて, 折れ線図形の特曲線の各条件の下, 関係式が成り立つような, すなわち $L_k = 0, k = 4, 5, \dots$ であるような解を探すことによってなされる. $\text{Area}(\gamma) = 0, G(\gamma) \neq 0, A_2 \cdot G(\gamma) = 0$ という γ の条件は, それぞれ特曲線 C_γ の, $(1, 1)$ を通る, $(1, 1)$ で滑らか, A_2 が $(1, 1)$ で C_γ に接するという条件に翻訳される. 例えば, 例 1 の γ に対し $C_\gamma : 1 - 2X + 2X^2Y - X^2Y^2 = 0$ であり, これはある A_2 に対して定理 2, 2 (3) の条件を満たす. このような γ として, 例えば $\gamma_1 = HV\{H^{-1}, V\}^2H^2VH^{-1}\{V^{-1}, H^{-1}\}\{V, H^{-1}\}V^{-1}H^{-2}V^{-1}$ があり, 対応する語は $W_{\gamma_1}(f, g) = g^{-1}f^{-2}g^{-1}\{f, g^{-1}\}\{f, g\}f^{-1}gf^2\{g^{-1}, f\}^2gf$, ここで, $\{f, g\} = f^{-1}g^{-1}fg$, なので, $W_{\gamma_1}(f, g) = \text{id}$ は初等的でない (ただし形式的な) 解を持つ. 定理 1 の証明は, 冪級数 f, g (の係数) に対して直接, 語 $W(f, g)$ (の係数) を計算することによりなされる ([6]).

参考文献

- [1] M. Blinov and Y. Yomdin, *Generalized center conditions and multiplicities for polynomial Abel equations of small degrees*, Nonlinearity 12 (1999), no.4, 1013-1028.
- [2] M. Briskin and Y. Yomdin, *Tangential version of Hilbert 16th problem for the abel equation*, Mosc. Math. J. Vol. 5 (2005), no.1, 23-53.
- [3] R. V. Chacon and A. T. Fomenko, *Recursion formulas for the Lie integral*, Adv. Math. **88** (1991), no.2, 200-257.
- [4] K. T. Chen, *Integration of paths—a faithful representation of paths by non-commutative formal power series*, Trans. Amer. Math. Soc. **89** (1958), 395-407.
- [5] R. Ree, *Lie elements and an algebra associated with shuffles*, Ann. of Math. (2) **68** (1958), 210-220.
- [6] I. Nakai and K. Yanai, *Relations of formal diffeomorphisms and the center problem*, Mosc. Math. J. Vol. 10 (2010), no.2, 415-468.
- [7] V. S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Graduate Texts in Mathematics 102, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [8] K. Yanai, *A study of relations in $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$* , Doctoral thesis, 2006.
- [9] K. Yanai, *Classification of connected palette diagrams without area and moment to find relations of formal diffeomorphisms*, Natural Science Report of the Ochanomizu University Vol. 56, No.2, p1-20, 2005.
- [10] Y. Yomdin, *The center problem for the Abel equation, compositions of functions, and moment conditions*, Mosc.Math. J. Vol. 3 (2003), no. 3, 1167-1195.
- [11] H. Żoladek, *The monodromy group*, Birkhäuser Vol. 67.

リー群上の左不変ローレンツ計量と リッチソリトンについて

恩田 健介 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科/ OCAMI)

1 序

多様体 M^n 上の擬リーマン計量 g_0 , ベクトル場 X と定数 α が

$$2\text{Ric}[g_0] + L_X g_0 + \alpha g_0 = 0 \quad (1.1)$$

を満たすとき, (M^n, g_0, X, α) をリッチソリトン構造といい, その時の擬リーマン計量 g_0 をリッチソリトンという. さらに, ベクトル場 X が $X = \nabla f$ を満たす関数 f を持つとき, リッチソリトン g_0 は勾配リッチソリトンであるという. また, 定数 α の符号が, 正, 零, 負であるとき, リッチソリトン g_0 はそれぞれ, 拡大, 安定, 収縮 リッチソリトンであるという. 定義式から, リッチソリトンは アインシュタイン計量の一般化の一つであることが分かる. さらにリッチソリトンは, 微分同相写像とスケーリングによってのみ変化するリッチ流

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t)_{ij} = -2\text{Ric}[g(t)]_{ij}, \quad g(0) = g_0$$

の特別な解であることが知られている. ([Ham93] を見よ.)

ユークリッド平面 \mathbb{R}^2 の標準計量は, リッチソリトンとして見ることができる.

Example 1.1 (Perelman [Per02]). \mathbb{R}^2 上のユークリッド計量 g_{st} は任意のリッチソリトンとなる. まず, ベクトル場 X を

$$X = -\frac{1}{2}(\alpha x + \beta y) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}(\beta x - \alpha y) \frac{\partial}{\partial y}$$

と選ぶ. このとき任意の実数 α に対して, $(\mathbb{R}^2, g_{st}, X, \alpha)$ はリッチソリトン方程式を満たす. さらに $\beta = 0$ のときは g_{st} は勾配リッチソリトン であり. $\beta \neq 0$ のときは g_{st} は非勾配 リッチソリトン となる.

その他に知られている結果として, 閉多様体上のリーマン計量がリッチソリトンであるとき, そのようなリッチソリトンは 全て勾配リッチソリトン になることが示されている. この結果から, 閉多様体上の安定, または拡大 リッチソリトン がアインシュタイン定数が零, 負のアインシュタイン計量になることが確認できる.

アインシュタイン計量にならないリッチソリトンの例として, 次の例がある.

Example 1.2 (The cigar soliton). 完備リーマン面 (\mathbb{R}^2, g_Σ) の計量 g_Σ を

$$g_\Sigma := \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{1 + x^2 + y^2}$$

で定義すると、これは安定勾配リッチソリトンである。また正の断面曲率

$$K = \frac{2}{1 + x^2 + y^2}$$

を持つ回転不変な計量でもある。

さらに、アインシュタインでない、非勾配リッチソリトンの例として、次の例に注目する。

Example 1.3 (Baird and Danielo [BD07], Lott [Lot07]). *Heisenberg* 群 H_3 は拡大・非勾配リッチソリトンである左不変リーマン計量を持つ。

この例は、Baird と Danielo, そして Lott がそれぞれ独立に構成した。Lauret [L03] の結果により、Heisenberg 群上の左不変リーマン計量は、isometry と scaling を modulo にして一つに決まるので、Heisenberg 群上の左不変リーマン計量は拡大非勾配リッチソリトンだけである。

本講演では、リー群上のローレンツ幾何を考え、その上にリッチソリトン構造を持つものがあることを紹介する。ここでは特に、Heisenberg 群に絞って紹介する。

2 Heisenberg 群

Heisenberg 群 H_3 は、

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

の形の行列の元と積で定義できる。 H_3 は次の map

$$H_3 \ni \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

によって \mathbb{R}^3 と微分同相であることがわかる。この同一視の下で、 (a, b, c) による左からの作用は

$$L_{(a,b,c)}(x_1, x_2, x_3) = (a + x_1, b + x_2, c + x_3 + ax_2)$$

となる。このとき、 H_3 のリー環は

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (2.1)$$

を基底として構成される. リー括弧積は

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = 0$$

という関係を満たす. $\{X_i\}_{i=1}^3$ を基底とする左不変ローレンツ内積, そして左不変ローレンツ計量を考える. Rahmani [Rah92] に符号を合わせるため, x_1, x_2, x_3 をそれぞれ $-x, y, z$ と置き換える. このとき,

Theorem 2.1 ([Rah92]). 3次元ハイゼンベルグ群 H_3 上の左不変ローレンツ計量は, *isometry* と *scaling* を *modulo* にして, 次の3つの計量

$$\begin{aligned} g_1 &= -dx^2 + dy^2 + (x dy + dz)^2, \\ g_2 &= dx^2 + dy^2 - (x dy + dz)^2, \\ g_3 &= dx^2 + (x dy + dz)^2 - ((1-x)dy - dz)^2. \end{aligned}$$

の内の一つに一致する.

この結果により, H_3 の左不変ローレンツ計量を調べる場合, g_1, g_2, g_3 の3つの計量を調べればよい.

3つの計量の特徴付け (特に g_1 について) を行う.

適当な $\text{frame}\{F_i\}$ と $\text{coframe}\{\theta\}$ を

$$g_k = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2, \quad \text{for } k = 1, 2, 3$$

と取ると, 計量 g_1, g_2, g_3 のリッチテンソル で0にならない成分はそれぞれ次のように表わされる.

$$\begin{aligned} g_1 : \quad & R_{11} = -\frac{1}{2}, \quad R_{22} = \frac{1}{2}, \quad R_{33} = -\frac{1}{2}, \\ g_2 : \quad & R_{11} = -\frac{1}{2}, \quad R_{22} = -\frac{1}{2}, \quad R_{33} = \frac{1}{2}, \\ g_3 : \quad & R_{ij} = 0. \end{aligned}$$

計量 g_2 は定曲率 $-1/4$ を持つローレンツ計量であり, 計量 g_3 は定曲率 0 を持つローレンツ計量である. しかし, 計量 g_1 は $R_{11} = -1/2(g_1)_{11}, R_{22} = 1/2(g_1)_{22}$ であるから, アインシュタイン計量ではない. 計量 g_1 に計量 g_2, g_3 のような特徴を示すもの, 今回はアインシュタイン計量の一般化の一つであるリッチソリトンという構造を入れる.

Theorem 2.2 ([Ond10]). ベクトル場 X を

$$\begin{aligned} X &= (xy + 2z)F_1 + yF_2 + xF_3 + \lambda \left\{ \frac{1}{2}(x^2 - y^2)F_1 + xF_2 + yF_3 \right\} \\ &\quad + \mu(xF_1 + F_2) + \nu(-yF_1 + F_3) + \xi F_1, \quad \lambda, \mu, \nu, \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

で定義する. このとき, $(H_3, g_1, X, -3)$ はリッチソリトン構造であり, 左不変ローレンツ計量 g_1 は収縮・非勾配リッチソリトンである. さらに g_1 はこれ以外のリッチソリトン構造を持たない.

この定理の証明は、ベクトル場 X を

$$X = f^1 F_1 + f^2 F_2 + f^3 F_3$$

とおき、 (f^i, α) に関するリッチソリトン方程式 (1.1) を解くことによって得られる。

この結果により、Heisenberg 群 H_3 上の左不変ローレンツ計量は、負、または零の
アインシュタイン計量か、または収縮・非勾配 リッチソリトンのどれかになること
が言える。

3 最後に

$E(1, 1)$, $E(2)$ についても同様の結果が得られる。

参考文献

- [BD07] P. Baird and L. Danielo, *Three-dimensional Ricci solitons which project to surfaces*, J. Reine Angew. Math. **608** (2007), 65–91.
- [GIK06] C. Guenther, J. Isenberg, and D. Knopf, *Linear stability of homogeneous Ricci solitons*, Int. Math. Res. Not. (2006), Art. ID 96253, 30.
- [Ham93] R. S. Hamilton, *The Harnack estimate for the Ricci flow*, J. Differential Geom. **37** (1993), no. 1, 225–243.
- [Lot07] J. Lott, *On the long-time behavior of type-III Ricci flow solutions*, Math. Ann. **339** (2007), no. 3, 627–666.
- [Mil76] J. Milnor, *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups*, Advances in Math. **21** (1976), no. 3, 293–329.
- [Ond10] K. Onda, *Lorentz Ricci solitons on 3-dimensional Lie groups*, Geom. Dedicata **147** (2010).
- [Per02] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, preprint: math. DG/0211159 (2002).
- [Rah92] S. Rahmani, *Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois*, J. Geom. Phys. **9** (1992), no. 3, 295–302 (French, with English summary).
- [RR06] N. Rahmani and S. Rahmani, *Lorentzian geometry of the Heisenberg group*, Geom. Dedicata **118** (2006), 133–140.

JOYCE 計量から生じるミニツイスター空間

本多 宣博[†] (東北大理)

ABSTRACT. 複素射影平面の連結和の上には Joyce 計量とよばれる自己双対計量 (正確には自己双対共形構造) が入る. Joyce 計量は 2 次元トーラス作用による対称性をもつ. Joyce 計量に付随するツイスター空間は Moishezon 多様体であり, 非常に美しい構造を持つことが知られている. 本稿では Joyce 計量のツイスター空間の 1 次元群作用による商空間 (ミニツイスター空間) が射影代数曲面として具体的に記述できることを説明する. これらのミニツイスター空間は, ツイスター空間上の多重反標準系とよばれる自然な線形系による有理写像の像として得られ, ただ一つの例外を除いて特異点を持つ有理曲面である. 微分幾何的には, これらのミニツイスター空間は Joyce 計量の S^1 作用による商空間として生じる 3 次元 Einstein-Weyl 空間と対応する.

1. JOYCE 計量

非負整数 n に対して $n\mathbb{CP}^2$ で n 個の複素射影平面の連結和を表す. ただし $0\mathbb{CP}^2 = S^4$ と約束する. 各 $n \geq 0$ に対し, $n\mathbb{CP}^2$ 上の Joyce 計量は 2 次元トーラス T^2 による $n\mathbb{CP}^2$ への滑らかな作用が与えられるごとに $(n+2)$ 個の実パラメーターを含む形で構成されるので, まず $n\mathbb{CP}^2$ への滑らかな T^2 作用の具体的な作り方を説明する.

\mathbb{C}^2 への標準的な T^2 作用を考え, この作用の固定点でのブローアップを n 回繰り返して得られる複素曲面を S とする. (初めは原点でブローアップするしかないが, 1 回ブローアップするごとに固定点が増え, n が大きくなるにつれてブローアップの仕方は増えていく.) S 上には T^2 作用が自然にリフトする. ブローアップはトポロジカルには \mathbb{CP}^2 (=複素射影平面の通常の向きを変えたもの) との連結和をとることになっているので S は $\mathbb{C}^2 \# n\overline{\mathbb{CP}^2}$ と diffeo である. よって初めの \mathbb{C}^2 に無限遠点を付け加えて, さらに向きを変えることにより $n\mathbb{CP}^2$ が得られる. 以上で滑らかな T^2 作用を持つ $n\mathbb{CP}^2$ が得られた. $n\mathbb{CP}^2$ への滑らかで effective なすべての T^2 作用はこのようにして得られることが知られている.

$n\mathbb{CP}^2$ へのなめらかで effective な T^2 作用を任意の一つ固定すると $n\mathbb{CP}^2$ は次のように 3 つのタイプの部分集合の disjoint union に分かれる:

[†]honda@math.tohoku.ac.jp.

1. 固定点集合 (すなわち stabilizer が T^2 全体であるところ). これは合計 $(n+2)$ 点出る.
2. 軌道が 1 次元 (S^1) になっているところ, 言い換えると stabilizer が S^1 であるところ. これらの和集合は $(n+2)$ 個の \mathbb{C}^* である.
3. 軌道が T^2 であるところ, すなわち stabilizer が identity のみであるところ. これらの和集合は初めの T^2 作用 on \mathbb{C}^2 の場合と同じで $\mathbb{C}^2 \setminus \{zw = 0\}$ ((z, w) は \mathbb{C}^2 の座標) と同相な dense open subset である.

T^2 作用による $n\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ の商空間は自然に (2次元) 閉円板 $\bar{D} = D \cup \partial D$ と同一視され,

$$\pi : n\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \rightarrow \bar{D}$$

を商写像とすると $\pi^{-1}(D)$ が上記 3 の open dense subset であり, 固定点の像は境界 ∂D 上の $(n+2)$ 点になる. これらの点により $\partial D \simeq S^1$ は $(n+2)$ 個の区間に分割され, それらの逆像が 2 の \mathbb{C}^* になっている. したがって $\pi^{-1}(\partial D)$ は $(n+2)$ 個の S^2 から成る輪っか (cycle) である. これらの S^2 を与えるごとに, stabilizer としての S^1 部分群 in T^2 が定まる. 言い換えると, $n\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ への T^2 作用が与えられるごとに $(n+2)$ 個の S^1 部分群 in T^2 で, 2次元球面を固定点集合の一つの連結成分としてもつものが定まる. これらの部分群は 2 節以降の話で重要になる.

$n\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ 上の Joyce 計量は, 円板 D に標準的な双曲計量 h_0 を入れておくと,

- なめらかで効果的な作用 $T^2 \curvearrowright \mathbb{C}\mathbb{P}^2$,
- 商空間 \bar{D} の境界上の $(n+2)$ 点

が与えられるごとに定まる自己双対計量計量である. より具体的には $\pi^{-1}(D) = D \times T^2$ 上では

$$(1) \quad g_J = h_0 + g_{11}(x, y)d\theta_1^2 + 2g_{12}(x, y)d\theta_1 d\theta_2 + g_{22}(x, y)d\theta_2^2$$

という形で与えられる. ここで (x, y) は D 上の座標, θ_1, θ_2 は T^2 上の angular coordinate である. 関数 g_{11}, g_{12}, g_{22} は具体的に与えられる. (出てくる関数は初等的な関数である.) これは $n\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ の dense open subset で定義されたリーマン計量であるが, これが上記のコンパクト化まで (すなわち cycle を付け加えたところまで) 共形構造として滑らかに拡張できることが示される. 関数 g_{ij} は基本的には 4次元多様体上の共形構造に対する自己双対性の方程式を 2次元群作用によって簡約して得られる (線形) 偏微分方程式系を具体的に解くことによって得られているが, 筆者はよく理解できていないので正確なことは原論文 [9] を参照していただきたい.

式 (1) から, $D \times T^2$ 上への自然な T^2 作用は等長変換である. また商写像 $D \times T^2 \rightarrow D$ は Riemannian submersion であり, 直積構造からくる接空間の分解 (D 方向へと T^2 方向への分解) は直交分解になっている. よく知られているように $n\mathbb{C}P^2$ 上の自己双対共形構造でなめらかで effective な T^2 作用をもつものは Joyce 計量に限る (藤木 [3]).

2. JOYCE 計量のツイスター空間とミニツイスター空間

本節が本稿の主題である. 詳細は論文 [5] を参照していただきたい.

$n\mathbb{C}P^2$ 上への T^2 作用と ∂D 上の $(n+2)$ 点を一つ与え, それらから定まる Joyce 計量のツイスター空間を Z とする. σ を Z の実構造とする. T^2 による等長変換は自然に Z 上への正則作用に持ち上がる. この作用は σ と可換である. 任意のツイスター空間の標準束は正則直線束としての自然な半分 $(1/2)K$ をもつ. 以下,

$$F := -\frac{1}{2}K_Z$$

とおく. Z 上の実構造 σ と T^2 作用は F 上に自然に持ち上がる. これにより任意の $m > 0$ に対して m 回テンソル積 $mF := F^{\otimes m}$ の切断の空間 $H^0(Z, mF)$ は実構造と T^2 作用を持つ. $H^0(Z, mF)^{T^2}$ をこの T^2 作用で固定される元のなす部分空間とし, それに付随する線形系を $|mF|^{T^2}$ と書くことにする. 特に $m = 1$ に対しては藤木 [3] により以下のことが知られている.

- $\dim |F|^{T^2} = 1$,
- $|F|$ は $(n+2)$ 個の元を除いてすべて (互いに同型な) 非特異既約 toric 曲面,
- $|F|$ の非特異でない元はどれも real (すなわち σ 不変) であり, それぞれ二つの非特異な既約 toric 曲面から成る.

pencil $|F|^{T^2}$ に付随する有理写像を $f : Z \rightarrow \mathbb{C}P^1$ とすると f のファイバーは $(n+2)$ 個の点以外では非特異 toric 曲面であり, $(n+2)$ 個の点では可約な toric 曲面に退化しているということである.

藤木 [3] では上記分類定理がこの pencil を利用して与えられた. 一方, 完備線形系 $|F|$ はほとんどの場合 pencil にしかない (すなわち $|F| = |F|^{T^2}$ となる) ので, 線形系を使って Z のより詳しい構造を調べようとする $m > 1$ なる m に対して $|mF|$ を考える必要がある. 一般に $|mF|$ の次元を求めるのは面倒であるが, $|mF|^{T^2}$ については容易に次がわかる:

命題 2.1. 任意の $m \geq 1$ に対して

$$\dim H^0(Z, mF)^{T^2} = m + 1$$

が成り立つ. より具体的に, y_0, y_1 を $H^0(Z, F)^{T^2}$ の基底とすると $H^0(Z, mF)^{T^2}$ の基底は $y_0^m, y_0^{m-1}y_1, y_0^{m-2}y_1^2, \dots, y_1^m$ で与えられる. \square

A_1, \dots, A_{n+2} を前節で説明した $(n+2)$ 個の T^2 不変な球面 (in $n\mathbb{C}P^2$) のなす cycle の既約成分とする. すなわち $\pi^{-1}(\partial D) = A_1 \cup \dots \cup A_{n+2}$ とする. 前節で説明したようにこれらはそれぞれ stabilizer として T^2 の S^1 部分群を定める. それらをそれぞれ K_1, \dots, K_{n+2} とする. ツイスター空間 Z への K_i 作用の複素化を $G_i \curvearrowright Z$ とする. ($G_i \simeq \mathbb{C}^*$ である.) 次は G_i 作用による Z の商空間を求め際に鍵となる.

命題 2.2. [5, §2] 各 $1 \leq i \leq n+2$ に対して次の性質を満たす自然数 m_i が存在する:

- i) $m < m_i$ のときは $H^0(Z, mF)^{T^2} = H^0(Z, mF)^{K_i}$,
- ii) $H^0(Z, m_i F)^{T^2} \subsetneq H^0(Z, m_i F)^{K_i}$.

さらにこのとき

$$\dim H^0(Z, m_i F)^{K_i} = \dim H^0(Z, m_i F)^{T^2} + 2$$

であり, $z, w \in H^0(Z, m_i F)^{K_i}$ で

$$H^0(Z, m_i F)^{K_i} = H^0(Z, m_i F)^{T^2} + \langle z, w \rangle$$

を満たしかつ $w = \bar{z}$, かつ $\text{div}(z)$ が 1 次の因子の和になっているようなものが存在する. ($\text{div}(z)$ は z の零点集合として得られる因子. $\text{div}(z)$ の各既約成分は T^2 不変であるが, z 自体は T^2 不変ではない.) \square

ここでコンパクトツイスター空間上の因子の次数とは, ツイスター直線との交点数のことである. 各 i に対して自然数 m_i と因子 $\text{div}(z)$ は $|F|^{T^2}$ の可約元の既約成分たちの和として具体的に与えることができる. (一般には $\text{div}(z)$ は重複度が 2 以上の成分をもつ. [5, §2] 参照.) たとえば K_i が $n\mathbb{C}P^2$ に semi-free に作用するならば $m_i = 1$ であり, それ以外の場合は $m_i > 1$ である. 性質 i), ii) から m_i は一意的である.

次にこれらの線形系に付随する有理写像を考える. $n\mathbb{C}P^2$ 上の Joyce 計量を任意に一つ固定し, Z をそのツイスター空間とする. 上のように $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n+2}$ を T^2 不変な球面のなす cycle とし, $1 \leq i \leq n+2$ を任意に与え, m_i を命題 2.2 から定まる自然数とする. $|m_i F|^{T^2}$ と $|m_i F|^{K_i}$ に付随する有理写像をそれぞれ f, Φ_i とする. f はもちろん Z のみから定まる写像であり, Φ_i は Z と i (すなわち $n+2$ 個ある T^2 不変な球面のうちどれを選んだか) のみにより定まる写像で

あることに注意する. 命題 2.1, 2.2 から, 次の可換図式を得る:

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\Phi_i} & \mathbb{CP}^{m_i+2} \\ f \downarrow & & \nearrow p \\ & & \mathbb{CP}^{m_i}. \end{array}$$

ここで p は部分空間としての埋め込み $H^0(Z, m_i F)^{T^2} \subset H^0(Z, m_i F)^{K_i}$ から定まる射影である. 命題 2.1 から像 $f(Z)$ は \mathbb{CP}^{m_i} 内の rational normal curve (すなわち m_i 次の非特異有理曲線) である. それを Λ とおくと, 図式 (2) から $\Phi_i(Z)$ は 3次元 cone $p^{-1}(\Lambda)$ に含まれる. しかし $\Phi_i(Z) = p^{-1}(\Lambda)$ は成り立たず, 次が成り立つ.

命題 2.3. 像 $\Phi_i(Z)$ は 3次元 cone $p^{-1}(\Lambda)$ とある 2次超曲面 $\mathcal{Q} \subset \mathbb{CP}^{m_i+2}$ の交わりとして得られる代数曲面である. \square

証明. 見やすくするために $m = m_i$ とおく. 積 zw は $H^0(Z, 2mF)$ の元であるが, $w = \bar{z}$ であることから

$$zw \in H^0(Z, 2mF)^{T^2}$$

となっている. 命題 2.1 より

$$H^0(Z, 2mF)^{T^2} = \langle y_0^{2m}, y_0^{2m-1}y_1, y_0^{2m-2}y_1^2, \dots, y_1^{2m} \rangle$$

なので

$$zw = a_0 y_0^{2m} + a_1 y_0^{2m-1} y_1 + a_2 y_0^{2m-2} y_1^2 + \dots + a_{2m} y_1^{2m}$$

と書ける. よって

$$\zeta_0 = y_0^m, \zeta_1 = y_0^{m-1} y_1, \dots, \zeta_m = y_1^m$$

とおけば 2次式 $Q = Q(\zeta_0, \dots, \zeta_m)$ で $zw = Q(\zeta_0, \dots, \zeta_m)$ を満たすものがとれる. (もちろん Q は一意には定まらない.) よって

$$\mathcal{Q} := \{zw = Q(\zeta_0, \dots, \zeta_m)\} \subset \mathbb{CP}^{m+2}$$

とおくと $\Phi_i(Z) \subset \mathcal{Q}$ である. よって $\Phi_i(Z) \subset p^{-1}(\Lambda) \cap \mathcal{Q}$. 等号が成立することを示すためには $p^{-1}(\Lambda) \cap \mathcal{Q}$ が既約で $\dim \Phi_i(Z) = 2$ であることを示せばよい. 前者は \mathcal{Q} が $\Lambda = \mathbb{CP}^1$ 上の conic 束に双有理同値であることから明らか. 後者を示すために非特異既約元 $S \in H^0(Z, F)$ をとり, 完全列

$$0 \longrightarrow (m-1)F \longrightarrow mF \longrightarrow mF|_S \longrightarrow 0$$

から生じるコホモロジー群の完全列

$$0 \longrightarrow H^0(Z, (m-1)F) \longrightarrow H^0(Z, mF) \longrightarrow H^0(S, mF|_S)$$

をみる. (最後の写像は一般には全射かどうかはわからない.) この K_i -fixed part をとると

$$(3) \quad 0 \longrightarrow H^0(Z, (m-1)F)^{K_i} \longrightarrow H^0(Z, mF)^{K_i} \longrightarrow H^0(S, mF|_S)^{K_i}$$

を得るが, 命題 2.2 (i) (m_i の最小性) から

$$H^0(Z, (m-1)F)^{K_i} = H^0(Z, (m-1)F)^{T^2}$$

であり, これは命題 2.1 から m 次元である. よって (3) の最後の写像の像は 3 次元ある. よって $\dim \Phi_i(S) \geq 1$. S は非特異元であればなんでもよいので $\dim \Phi_i(Z) \geq 2$ である. \square

上記の証明では z を具体的に与えていないのでわかりにくいだが, 実際には $\text{div}(z)$ が $|F|^{T^2}$ の既約元たちの和として具体的に書けることを使って 2 次式 $Q(\zeta_0, \dots, \zeta_m)$ を, Joyce 計量を与える $(n+2)$ 個のパラメーター (境界 ∂D 上の $(n+2)$ 点) のうちの一部を使って具体的に与えることができる. (論文 [5] の式 (21) を参照. ここで一般にはすべてのパラメータが必要とならないことは Joyce 計量の変形を考える際に本質的な役割を果たす.)

命題 2.3 により, 各 i ごとに代数曲面 $\Phi_i(Z)$ が得られた. (これは i のみから定まっていることに注意する.) ここで Φ_i は線形系 $|m_i F|^{K_i}$ による有理写像であったことを思い出すと, Φ_i は $G_i (= K_i^{\mathbb{C}})$ 作用に関して同変写像である. G_i は Φ_i の値域 $\mathbb{C}P^{m_i+2}$ には自明に作用するので Φ_i の任意のファイバーは G_i 不変である. さらに $H^0(Z, m_i F)^{K_i}$ の生成元が具体的な形で与えられていることから, 非特異元 $S \in |F|^{T^2}$ に Φ_i を制限したときの一般ファイバーは (非特異で) 既約な $\mathbb{C}P^1$ であることを確かめることができる. よって $\Phi_i(Z)$ は Z の G_i 作用による商空間とみなすことができる.

定義 2.4. 代数曲面 $\Phi_i(Z)$ のことを Joyce 計量のツイスター空間 Z の G_i 作用によるミニツイスター空間という. \square

図式 (2) 全体に $G := (T^2)_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ が作用しているので, 特に $\mathbb{C}P^{m_i+2}$ には $G/G_i (\simeq \mathbb{C}^*)$ が作用しており $\Phi_i(Z)$ は G/G_i 不変である. すなわち定義 2.4 のミニツイスター空間は自然な \mathbb{C}^* 作用を持つ. その作用による商空間が有理曲線 Λ になっている.

なお, 上では線形系に有理写像の像として G_i 作用によるツイスター空間の商空間を得たが, より精密に, $\Phi_i(Z)$ は (線形系とは無関係に定まる) Moishetzon 多様体への正則な作用による canonical な商空間であることを示すことができる ([5, Prop. 6.2]). また, 命題 2.2 を使って, 任意の Joyce 計量のツイスター空間に対してその射影モデルを完全に具体的な形で与えることができる [6]. また, か

なり多くの Z と i に対して, Z をミニツイスター空間 $\Phi_i(Z)$ への有理写像と K_i 作用を保ったまま, T^2 作用は保たずに変形できることを示すことができる ([5, §4,5]). これにより, 多くの場合に Joyce 計量は S^1 作用を保ったまま T^2 作用は保たずに変形できることがわかる. ([5, Theorem 4.2] ではこのような変形をもつための十分条件が作用 $K_i \curvearrowright n\mathbb{C}P^2$ 作用のトポロジカルなデータを使って与えられている.)

3. ミニツイスター空間と 3次元 EINSTEIN-WEYL 多様体

本節ではミニツイスター空間と 3次元 Einstein-Weyl 多様体について簡単に説明する. 詳しいことは中田文憲氏との共著論文 [7] や中田氏による解説 [10] を参照していただきたい.

まず滑らかな多様体 M 上の Einstein-Weyl 構造とは, (正定値) 共形構造 $[h]$ と torsion free なアファイン接続 ∇ の組 $([h], \nabla)$ で以下の条件を満たすものである.

- ∇ は次の意味で $[h]$ と両立する: $\nabla h = \alpha \otimes h$, $\exists \alpha \in A^1(M)$,
- $\text{sym-Ric}(\nabla) = fh$, $\exists f \in C^\infty(M)$. ここで $\text{sym-Ric}(\nabla)$ は ∇ のリッチテンソル (∇ は Levi-Civita とは仮定していないのでリッチテンソルは対称テンソルになるとは限らない) を対称化したものを表す.

容易にわかるようにこれらの条件は代表元 $h \in [h]$ の取り方によらない.

一方, (Hitchin の意味での) ミニツイスター空間とは, 非特異複素曲面 \mathcal{X} であって非特異有理曲線 L で自己交点数が 2 であるものを含むもののことをいう. 次の命題はミニツイスター空間と 3次元 Einstein-Weyl 多様体が局所的には同値な概念であることを意味する:

命題 3.1. (Hitchin[4].) 3次元 Einstein-Weyl 多様体と上記の意味でのミニツイスター空間の間には自然な一対一対応がある. □

この対応は具体的には次のように与えられる. 3次元 Einstein-Weyl 多様体を与えられるとその上の ∇ に関する測地線全体のなす空間としてミニツイスター空間が定まり, 逆にミニツイスター空間を与えられるとその上の自己交点数が 2 である非特異有理曲線全体のなす空間として 3次元 Einstein-Weyl が定まる.

上記の対応は局所的なものであるが, 大域的には次が成り立つ.

命題 3.2. ([7, Theorem 2.10]) $\delta > 0$ とする. 代数曲面 S 上の δ 個の通常二重点をもつ有理曲線 L で $L^2 = 2\delta + 2$ を満たすもののなす Severi 多様体は 3次元複素多様体であり, 自然な (複素)Einstein-Weyl 構造を持つ. □

ここで代数曲面上の Severi 多様体とは、一つの線形系の中で指定された個数の通常二重点をもつ既約元のなす代数多様体である。命題 3.2 は命題 3.1 の特異点がある場合への一般化ないし大域化とみなすことができるので、ミニツイスター空間の概念は次のように一般化される。

定義 3.3. ([7, Def. 2.11]) 自然数 m に対して指数 m のミニツイスター空間とは、代数曲面 S とその上の完備線形系 $|C|$ の組 $(S, |C|)$ であって、 C が次を満たす有理曲線であるようなものをいう: (i) $C^2 = 2m$, (ii) C の特異点集合は $m - 1$ 個の通常二重点からなる。□

この定義を用いれば、命題 3.2 は「指数 m のミニツイスター空間の Severi 多様体は 3次元 Einstein-Weyl 多様体である」と述べることができる。なお、これの逆「(なんらかの意味で maximal な) 3次元 Einstein-Weyl 多様体上の測地線の空間はあるミニツイスター空間の Severi 多様体である」を示すことは興味深い問題と思われる。

前節の定義 2.4 のミニツイスター空間は定義 3.3 の意味でのミニツイスター空間になっている：

命題 3.4. Z を $n\mathbb{C}P^2$ 上の Joyce 計量のツイスター空間とする。各 $1 \leq i \leq n+2$ から定まるミニツイスター空間 $\Phi_i(Z)$ は指数 m_i のミニツイスター空間である。ここで m_i は命題 2.2 で得られた数。□

また、3次元 Einstein-Weyl 多様体は S^1 作用で不変な自己双対構造の次元簡約として自然に生じることが知られている：

命題 3.5. (Jones-Tod [8]) M を向きづけられたなめらかな 4次元多様体、 K を 1次元の連結リー群で M に自由に作用しているとする。 M 上の自己双対的な共形類 $[g]$ が K 作用で保たれているとする。このとき商空間 M/K 上には自然な Einstein-Weyl 構造が入る。逆に free な K 作用をもつ自己双対共形構造はすべて 3次元 Einstein-Weyl 多様体 (とその上の monopole 方程式の解) から得られる。□

なお、Joyce 計量のミニツイスター空間に対応する 3次元 Einstein-Weyl 多様体は、Calderbank-Pedersen [2] によって具体的に与えられている。

これまで登場してきた対象の関係は以下のようにになっている：

$$\begin{array}{ccc}
 \text{[微分幾何]} & & \text{[複素幾何]} \\
 \text{自己双対多様体} & \longleftrightarrow & \text{ツイスター空間} \\
 \downarrow & \leftarrow 1 \text{次元群作用による商} \rightarrow & \downarrow \\
 \text{3次元 Einstein-Weyl 多様体} & \longleftrightarrow & \text{ミニツイスター空間}
 \end{array}$$

3次元 Einstein-Weyl 多様体とミニツイスター空間の間の対応は、局所的には Hitchin により確立されているが、上で触れたように大域的には ← 側の方向しか確立されていない。

REFERENCES

- [1] M. Atiyah, N. Hitchin, I. Singer, *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **362** (1978), 425–461.
- [2] D. M. J. Calderbank, H. Pedersen, *Self-dual Einstein metrics with torus symmetry*, J. Differential. Geom. **60** (2002) 485–521.
- [3] A. Fujiki, *Compact self-dual manifolds with torus actions*, J. Diff. Geom. **55** (2000), 229–324.
- [4] N. Hitchin, *Complex manifolds and Einstein's equations*, Lecture Notes in Math. **970** (1982) 73–99.
- [5] N. Honda, *A new series of compact minitwistor spaces and Moishezon twistor spaces over them*, J. reine angew. Math. **642** (2010), 197–235. arXiv:0805.0042.
- [6] N. Honda, *Projective models of the twistor spaces of Joyce metrics*. arXiv:0805.0046.
- [7] N. Honda and Fuminori Nakata, *Minitwistor spaces, Severi varieties, and Einstein-Weyl structure*. arXiv:0901.2264.
- [8] P.E. Jones, K.P. Tod, *Minitwistor spaces and Einstein-Weyl geometry*, Class. Quan. Grav. **2** (1985), 565–577.
- [9] D. Joyce, *Explicit construction of self-dual 4-manifolds*, Duke Math. J. **77** (1995), 519–552.
- [10] 中田文憲, 3次元 Severi 多様体上の Einstein-Weyl 構造, 第 56 回 (2009 年) 幾何学シンポジウム予稿集

対称空間上のベクトル束、等径関数とラドン変換

長友康行

九州大学大学院数理学研究院

1. INTRODUCTION

本稿の最初の目的はコンパクト型の対称空間上で組織的に等径関数を構成することにある。そのために、対称空間 G/K 上のベクトル束と切断を利用する。ベクトル束と切断を指定するために G の既約表現 W で、その主軌道が W 内の余次元 1 の球面となっているものを選ぶ。この表現を K に制限することにより、等質ベクトル束を得る。Frobenius の相互律により、 W はこのベクトル束の切断のなす空間とみなせるので、 W の元をひとつ固定して、ベクトル束の切断を得る。このとき、この切断の固定部分群として $H \subset G$ を得るが、仮定から G の H による商空間は球面となることに注意する。

G はコンパクトであるので、 W の不変内積を利用して、指定された切断のノルムの 2 乗を関数 $f: G/K \rightarrow \mathbf{R}$ とみなす。 f の零点集合は G/K の全測地的部分多様体となることが示される。

H の G/K への作用が余等質性 1 であるときには、 f は等径関数となることがわかる。この場合、ベクトル束とその切断を利用した対称空間内の部分多様体の幾何学を構築し、ベクトル束の第 2 基本形式と切断が等径関数の正則等位面（等径超曲面）の形作用素と関係することを示す。その結果、等径超曲面の平均曲率や主曲率を求めることができる。平均曲率は統一的に記述されるが、主曲率の記述においては対称空間の個性が反映される。また、等径超曲面の族内にただ一つ極小超曲面が存在することがわかる。

余等質性が 1 より大きいときには、 f は等径関数ではないことが示される。しかし、新たな関数を導入することによって \mathbf{R}^k 値等径関数が得られる (k は作用の余等質性を表す)。さらに、新しい等径関数 \tilde{f} を構成できる。この \tilde{f} は f よりも大きな対称性を持つ。すなわち $H \subset \tilde{H} \subset G$ をみたす部分群 \tilde{H} が存在し、 \tilde{H} は \tilde{f} を不変にする。この \tilde{f} と \tilde{H} の出現を、 W と関連した表現、ベクトル束とその切断を使って代数的、幾何学的に説明する。なお、副産物として、 H -軌道は等焦点部分多様体ではないことも示される。

最後に、ラドン変換 $R: C^\infty(G/K) \rightarrow C^\infty(H \backslash G)$ を定義し、ここで得られた対称空間 G/K の等径関数のラドン変換を考察する。等径関数のラドン変換は球面上の等径関数となり、その等径超曲面の異なる主曲率の個数は H の G/K への作用の余等質性により異なる。余等質性が 1 であれば、得られた球面内の等径超曲面の相異なる主曲率の数は 2 となり、それ以外の場合には、4 となる。特に、尾関 - 竹内 [10] により得られた非等質な等径超曲面に対応する等径関数が得られる。

本研究は久留米高専の高橋正郎氏との共同研究 [8] である。

2. 準備

2.1. 等径関数.

定義 2.1. リーマン多様体 (M, g) 上の \mathbf{R}^k 値関数 $f : M \rightarrow \mathbf{R}^k$ が等径関数であるとは、 $f = (f_1, \dots, f_k)$ とおいたときに、

- (1) $\langle df_i, df_j \rangle = F_{ij}(f_1, \dots, f_k)$
- (2) $\Delta f_i = G_i(f_1, \dots, f_k)$

となる関数 $F_{ij}, G_i : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ が存在することである。

正則値に対する f の等位面は等径部分多様体といわれる。

球面上の等径関数の例を挙げる。球面上の等径超曲面の主曲率は定数であることが知られており、異なる主曲率の数を g とすれば、 $g = 1, 2, 3, 4, 6$ となる [5]。

例. ($g = 2$) S^{N-1} を \mathbf{R}^N 内の単位球面とする。 (x_1, \dots, x_N) を \mathbf{R}^N の標準的な座標関数とする。このとき、

$$\frac{1}{N} \left\{ q \sum_{i=1}^p x_i^2 - p \sum_{\alpha=1}^q x_\alpha^2 \right\}$$

は等径関数である。ただし、 $2 \leq p \leq N - 2$, $p + q = N$ とする。等径超曲面は $S^{p-1} \times S^{q-1}$ と同一視される。

この例では等径超曲面は球面の等長変換群の軌道となっている。このような等径超曲面は等質であるといわれる。 $g = 1, 2, 3$ の場合には、等径超曲面はすべて等質であることが知られている。また、等質な等径超曲面は [3] の結果を利用することにより、高木 - 高橋により分類されている [11]。しかし、 $g = 4$ の場合には非等質な等径超曲面が存在する。

まず、野水による $g = 4$ である等径関数の例を紹介する [9]。

例. S^{2N-1} を \mathbf{C}^N ($N \geq 3$) 内の単位球面であるとする。 $(x_1 + iy_1, \dots, x_N + iy_N)$ を \mathbf{C}^N の標準的な座標関数とする。このとき、

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^2 + 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2$$

は等径関数である。この例でも等径超曲面は等質である。

非等質な等径超曲面の例は、尾関 - 竹内により発見された [10]。後に Ferus, Karcher と Münzner が組織的に非等質等径超曲面を構成した [1]。これらの等径関数は FKM 型といわれる。

2.2. グラスマン多様体の幾何学. W を N 次元実、もしくは複素ベクトル空間とし、 W 内の p 次元部分空間からなるグラスマン多様体を $Gr_p(W)$ とおく。 $(W$ が実ベクトル空間のときには W は向きを持つと仮定し、向きを込めた部分空間からなるグラスマン多様体も考えることにするが、記号が煩雑になることを避けるため、区別しない。)

$S \rightarrow Gr_p(W)$ を同語反復ベクトル束とすれば、 $S \rightarrow Gr_p(W)$ は自然に W をファイバーとして持つ階数 N の自明束 $\underline{W} \rightarrow Gr_p(W)$ の部分束とみなせる。したがって、商ベクトル束として、 $Q \rightarrow Gr_p(W)$ を得る。

$$0 \rightarrow S \xrightarrow{i_S} \underline{W} \xrightarrow{\pi_Q} Q \rightarrow 0.$$

本稿では、ベクトル束 $Q \rightarrow Gr_p(W)$ を**普遍商束**ということにする。

ここで、 W にその係数体に応じて、内積、もしくはエルミート積（簡単のため、以後スカラー積という）を入れる。すると、 $Gr_p(W)$ にはリーマン対称空間としての構造が入るが、さらにベクトル束 $S \rightarrow Gr_p(W)$, $Q \rightarrow Gr_p(W)$ にもファイバー計量 g_S, g_Q が入る。また、 $\underline{W} \rightarrow Gr_p(W)$ の積接続を利用すれば、 $S \rightarrow Gr_p(W)$, $Q \rightarrow Gr_p(W)$ にも接続が導入されるが、これは標準接続といわれるものと一致する。

ベクトル空間 W のスカラー積を用いて定義されるベクトル束としての準同型を $\pi_S : \underline{W} \rightarrow S$, $i_Q : Q \rightarrow \underline{W}$ とおく。前者は直交射影であり、後者は $S \rightarrow Gr_p(W)$ の $\underline{W} \rightarrow Gr_p(W)$ における直交補空間をとることにより得られる $\underline{W} \rightarrow Gr_p(W)$ の部分束 $S^\perp \rightarrow Gr_p(W)$ と普遍商束を同一視することにより得られる。

さて、 $S \rightarrow Gr_p(W)$ の切断 s を $i_S(s)$ と同一視することにより、 W に値をもつ関数とみなし、

$$I(s) := \pi_Q di_S(s)$$

と定義すれば、 I はベクトル束 $\text{Hom}(S, Q)$ に値をもつ 1-形式となる。 $I \in \Omega^1(\text{Hom}(S, Q))$ を**ベクトル束の第 2 基本形式**という [4]。同様にして $J := \pi_S di_Q \in \Omega^1(\text{Hom}(Q, S))$ も定義される。また、準同型 $\pi_Q : \underline{W} \rightarrow Q$ により、ベクトル空間 W はまた、 $Q \rightarrow Gr_p(W)$ の切断のなす空間とみなせることに注意する。

次に写像 $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ が与えられたとする。写像 f により、グラスマン多様体上のベクトル束やその計量、接続、第 2 基本形式を引き戻す。すると、この誘導接続と M のリーマン計量により、引き戻し束 $f^*Q \rightarrow M$ の切断に作用するラプラス作用素 Δ が定義される。また、ベクトル空間 W は、引き戻し束 $f^*Q \rightarrow M$ の切断のなす集合ともみなせる。

ここで、第 2 基本形式 I, J を使って、

$$A := \sum_{i=1}^n I_{e_i} J_{e_i} : f^*Q \rightarrow f^*Q$$

なるベクトル束としての準同型を定義し、**平均曲率作用素**ということにする。ただし、 $n = \dim M$ とし、 e_1, \dots, e_n は M の接空間の正規直交基底とする。

3. 関数の構成

(G, K) をコンパクト型の既約対称対であるとする。ただし、コンパクトリーマン群 G は単連結であり、その閉部分群 K は連結であるとする。コンパクト対称空間 G/K 上のベクトル束とその切断を利用して、以下のように関数を構成する。

まず、 W を G 不変スカラー積をもつ、主軌道が余次元 1 の球面となる G の既約表現とする。このような表現は以下の表現に限る [2]。

• Table 3.1

G	$SU(n)$	$Spin(n)$	$Spin(7)$	$Spin(9)$	$Sp(n)$
W	$\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n*}$	\mathbb{R}^n	S_7	S_9	$\mathbb{C}^{2n} \cong \mathbb{C}^{2n*}$
G	$Spin(8)$	G_2			
S_M	S_8^+, S_8^-	\mathbf{R}^7			

この表において, S_n は $Spin(n)$ のスピンの表現であり, S_n^\pm は $Spin(n)$ の半スピンの表現である。

次にその表現を部分群 K に制限して得られる K 表現を考え, W を K 既約表現に分解する。

$$W = U_0 \oplus V_0, \quad \dim U_0 = p, \quad \dim V_0 = q.$$

(W 自身が K 既約表現となる場合も存在するが, このような場合は除く。) 等質ベクトル束を $U := G \times_K U_0, V := G \times_K V_0$ とおく。Frobenius の相互律により, $W \subset \Gamma(U), \Gamma(V)$ とみなせる。

このとき, $(V \rightarrow G/K, W)$ による誘導写像 [7]

$$i : G/K \rightarrow Gr_p(W), \quad i(gK) = gU_0 \subset W$$

が等長写像となるように G/K の計量 g を定める。

すると, $i : G/K \rightarrow Gr_p(W)$ は全測地的部分多様体となる [7]。さらに次の定理が成り立つ。

定理 3.1. [7, Theorem 7.2] $i : G/K \rightarrow Gr_p(W)$ を全測地的部分多様体とする。 $Q \rightarrow Gr_p(W)$ を普遍商束とし, その i による引き戻し束を $V \rightarrow G/K$ とおく。

このとき, $V \rightarrow G/K$ は標準接続により, ホロノミー分解 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_L$ され, W は $V_l \rightarrow G/K (l = 1, 2, \dots, L)$ のラプラス作用素の固有空間とみなせる。さらに平均曲率作用素 A に対して, $\Delta t + At = 0$ が成り立つ。

この定理を利用すれば, 次の結果が得られる。ここで, $n = \dim G/K$ とする。

定理 3.2. W が G の実表現であれば, 任意の $s \in W \subset \Gamma(U)$ と $t \in W \subset \Gamma(V)$ に対して,

$$\Delta s = \frac{n}{p}s, \quad \Delta t = \frac{n}{q}t$$

が成り立つ。

W が G の複素表現であれば, 任意の $s \in W \subset \Gamma(U)$ と $t \in W \subset \Gamma(V)$ に対して,

$$\Delta s = \frac{n}{2p}s, \quad \Delta t = \frac{n}{2q}t$$

が成り立つ。

そこで, $w \in W (|w| = 1)$ に対応する $U \rightarrow G/K, V \rightarrow G/K$ の切断をそれぞれ, $s \in \Gamma(U), t \in \Gamma(V)$ とおく。 $w \in W$ の固定部分群を $H \subset G$ とおく。

関数 $|s|^2 : G/K \rightarrow \mathbf{R}$ が考察の対象である。

定理 3.2 から, 次の結果が得られる。ここで, $N := \dim W$ である。

定理 3.3. W が G の実表現であれば、

$$\Delta|s|^2 = \frac{2nN}{pq} \left(|s|^2 - \frac{p}{N} \right),$$

が成り立つ。

W が G の複素表現であれば、

$$\Delta|s|^2 = \frac{nN}{pq} \left(|s|^2 - \frac{p}{N} \right),$$

が成り立つ。

したがって、関数 $|s|^2 : G/K \rightarrow \mathbf{R}$ は等径関数の定義内の条件 (2) を満たすことがわかる。しかし、一般には条件 (1) は満たされない。

4. 臨界部分多様体

G/K の二つの部分集合を以下のように定義する。

$$S_0 := \{x \in G/K \mid |s|^2 = 0\}, \quad S_M := \{x \in G/K \mid |s|^2 = 1\}$$

定理 4.1. (cf. [6]) 関数 $|s|^2 : G/K \rightarrow \mathbf{R}$ の臨界点のなす集合は $S_0 \cup S_M$ となる。 S_0, S_M ともに H -軌道であり、 G/K の全測地的部分多様体となる。また、 $|s|^2 : G/K \rightarrow \mathbf{R}$ は *Morse-Bott* 関数である。

• Table 3.2

G/K	W	H	$U_0 \oplus V_0$	S_0, S_M
$SU(n)/SO(n)$	\mathbf{C}^n	$SU(n-1)$	$\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^n$	$SU(n-1)/SO(n-1)$
$Gr_p(\mathbf{C}^n)$	\mathbf{C}^n	$SU(n-1)$	$\mathbf{C}^p \oplus \mathbf{C}^q$	$Gr_p(\mathbf{C}^{n-1}), G_{p-1}(\mathbf{C}^{n-1})$
$Gr_p(\mathbf{R}^n)$	\mathbf{R}^n	$Spin(n-1)$	$\mathbf{R}^p \oplus \mathbf{R}^q$	$Gr_p(\mathbf{R}^{n-1}), G_{p-1}(\mathbf{R}^{n-1})$
S^{n-1}	\mathbf{R}^n	$Spin(n-1)$	$\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^{n-1}$	$S^{n-1}, 2\text{points}$
$Gr_4(\mathbf{R}^7)$	S_7	G_2	$\mathbf{R}^4 \oplus \mathbf{R}^4$	$G_2/SO(4), G_2/SO(4)$
$Gr_4(\mathbf{R}^8)$	S_8^\pm	$Spin(7)$	$\mathbf{R}^4 \oplus \mathbf{R}^4$	$Gr_4(\mathbf{R}^7), Gr_3(\mathbf{R}^7)$
$Gr_4(\mathbf{R}^9)$	S_9	$Spin(7)$	$\mathbf{R}^8 \oplus \mathbf{R}^8$	$Gr_4(\mathbf{R}^7), Gr_3(\mathbf{R}^7)$
$Sp(n)/U(n)$	\mathbf{C}^{2n}	$Sp(n-1)$	$\mathbf{C}^n \oplus \mathbf{C}^{n*}$	$Sp(n-1)/U(n-1)$
$Gr_p(\mathbf{H}^n)$	\mathbf{H}^n	$Sp(n-1)$	$\mathbf{H}^p \oplus \mathbf{H}^q$	$Gr_p(\mathbf{H}^{n-1}), G_{p-1}(\mathbf{H}^{n-1})$
$G_2/SO(4)$	\mathbf{R}^7	$SU(3)$	$\mathbf{R}^4 \oplus \mathbf{R}^3$	$SU(3)/SO(3), CP^2$

5. 等径関数

補題 5.1. c を関数 $|s|^2 : G/K \rightarrow \mathbf{R}$ の正則値とする。以下の3つの場合を除いて、 $S_c := (|s|^2)^{-1}(\{c\})$ も H -軌道となる。(したがって H の G/K への作用は余等質次元1の作用となる。)

$$(G/K, W) : (SU(n)/SO(n), \mathbf{C}^n), \quad (Sp(n)/U(n), \mathbf{C}^{2n}), \quad (Gr_4(\mathbf{R}^9), S_9).$$

それぞれの H 作用の主軌道の余次元は 2, 3, 2 となる。

ここで、余等質次元が1である場合と他の場合を分けて考察することにする。

5.1. 余等質次元 = 1 の場合.

補題 5.2. H の G/K への作用が余等質次元 1 の場合には、 $|s|^2$ は等径関数となる。

$|s|^2$ の正則点において、 S_c の単位法ベクトル \mathbf{n} を

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$$

と定める。また、切断 s, t とベクトル束の第 2 基本形式 I, J を利用して、 G/K の接ベクトル束の準同型 \tilde{I} と \tilde{J} を次のように定める。

$$g(\tilde{I}X, Y) = \frac{1}{2} \{g_V(I_X s, I_Y s) + g_V(I_Y s, I_X s)\}$$

$$g(\tilde{J}X, Y) = \frac{1}{2} \{g_U(J_X t, J_Y t) + g_U(J_Y t, J_X t)\}.$$

\tilde{I} と \tilde{J} は H 不変な対称作用素となる。

このとき、 S_c の形作用素を $A_{\mathbf{n}}$ とおけば、

$$A_{\mathbf{n}} = \frac{2}{|df|} (\tilde{I} - \tilde{J}).$$

が成り立つ。 \tilde{I} と \tilde{J} の固有空間分解および固有値は完全に決定できるので、 S_c の平均曲率および主曲率を求めることができる。

定理 5.3. $\text{grad } |s|^2$ のノルムは以下のようになる。

$$|\text{grad } |s|^2| = \begin{cases} 2|s||t|\sqrt{\frac{n}{pq}}, & W : \text{実表現}, \\ |s||t|\sqrt{\frac{n}{pq}}, & W : \text{複素表現}. \end{cases}$$

定理 5.4. S_c の平均曲率 m は

$$m = \begin{cases} \frac{1}{|s||t|} \sqrt{\frac{n}{pq}} \{|s|^2(q-1) - |t|^2(p-1)\}, & W : \text{実表現}, \\ \frac{1}{2|s||t|} \sqrt{\frac{n}{pq}} \{|s|^2(2q-1) - |t|^2(2p-1)\}, & W : \text{複素表現} \end{cases}$$

となる。とくにただひとつの $c \in (0, 1)$ に対して、 S_c は極小超曲面であることがわかる。

主曲率は統一的には記述されず、多様体と表現 W の個性が反映される結果となっている。なお、 $|s|^2 = c$ であるが、切断を尊重し、 $|s|, |t|$ を用いて主曲率を記述する。

定理 5.5. $(Gr_p(\mathbf{R}^N), \mathbf{R}^N)$ の場合、 S_c の主曲率は

$$\frac{|s|}{|t|}, \quad -\frac{|t|}{|s|}, \quad 0,$$

となり、その重複度はそれぞれ $q-1, p-1, (p-1)(q-1)$ となる。

定理 5.6. $(Gr_p(\mathbf{C}^N), \mathbf{C}^N)$ の場合、 S_c の主曲率は

$$\frac{1}{\sqrt{2}|s||t|}(|s|^2 - |t|^2), \quad \frac{|s|}{\sqrt{2}|t|}, \quad -\frac{|t|}{\sqrt{2}|s|}, \quad 0,$$

となり、その重複度はそれぞれ $1, 2(q-1), 2(p-1), 2(p-1)(q-1)$ となる。

定理 5.7. $(Gr_p(\mathbf{H}^N), \mathbf{H}^N)$ の場合、 S_c の主曲率は

$$\frac{1}{2|s||t|}(|s|^2 - |t|^2), \quad \frac{|s|}{2|t|}, \quad -\frac{|t|}{2|s|}, \quad 0,$$

となり、その重複度はそれぞれ $3, 4(q-1), 4(p-1), 4(p-1)(q-1)$ となる。

定理 5.8. $(Gr_4(\mathbf{R}^7), S_7)$ の場合、 S_c の主曲率は

$$\frac{\sqrt{3}}{12} \frac{1}{|s||t|} \left\{ 3(|s|^2 - |t|^2) \pm \sqrt{9 - 4|s|^2|t|^2} \right\}, \quad 0,$$

となり、その重複度はそれぞれ $3, 3, 5$ となる。

定理 5.9. $(G_2/SO(4), \mathbf{R}^7)$ の場合、 S_c の主曲率は

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{|s||t|} \left\{ (|s|^2 - |t|^2) \pm \sqrt{1 - |s|^2|t|^2} \right\}, \quad -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{|t|}{|s|}, \quad 0,$$

となり、その重複度はそれぞれ $2, 2, 1, 2$ となる。

なお、ここで、

$$\tilde{f} = |s|^2 - \frac{p}{N}$$

と定義する。このとき、 \tilde{f} は固有関数となる。もちろん、等径関数である。

5.2. 余等質次元 > 1 の場合. 例外的な 3 つの場合には、 $|s|^2$ は等径関数ではないことが示される。しかし、さらに関数を定義することによって、 \mathbf{R}^k 値等径関数を構成できる (k はそれぞれの余等質次元を表す)。なお、これらの場合、主軌道は等焦点部分多様体ではないことも示すことができる。

• $(SU(n)/SO(n), \mathbf{C}^n)$ ($n \geq 3$)

補題 5.10. \mathbf{R}^2 に値をとる関数 F を以下のように定義する。

$$F := (|s|^2 - |t|^2, 2g_U(s, t)).$$

このとき、 F は等径関数となる。

さらに $\tilde{f} = |F|^2 = (|s|^2 - |t|^2)^2 + 4g_U(s, t)^2$ と定める。

定理 5.11. \tilde{f} は対称空間 $SU(n)/SO(n)$ 上の等径関数となる。

$w \in W$ と \tilde{f} の関係を説明する。 h を $W \cong \mathbf{C}^n$ の不変エルミート積とすれば、 $\tilde{w} := iw \otimes h(\cdot, w) - \frac{i}{n} I_n \in W \otimes W^*$ は $\mathfrak{su}(n)$ の元とみなせる。すると $\mathfrak{su}(n)$ の標準分解 $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{m}$ に応じて、 \tilde{w} はホロノミー束 $SU(n) \times_{SO(n)} \mathfrak{so}(n)$ の切斷 \tilde{s} を誘導する。このとき、

$$2|\tilde{s}|^2 = 4(|s|^2|t|^2 - g_U(s, t)^2) = 1 - \left\{ (|s|^2 - |t|^2)^2 + 4g_U(s, t)^2 \right\} = 1 - \tilde{f}$$

が成り立つ。 \tilde{w} は $\tilde{H} := S(U(1) \times U(n-1))$ の作用で不変であるので、次の結果が成り立つ。

補題 5.12. 等径関数 \tilde{f} は \tilde{H} の作用の下で不変である。

\tilde{H} の $SU(n)/SO(n)$ への作用は余等質性 1 である。

補題 5.13. \tilde{f} の臨界点の集合は $\tilde{f}^{-1}(0)$ と $\tilde{f}^{-1}(1)$ からなる。

補題 5.14. $F^{-1}(0)$ は $\tilde{f}^{-1}(0)$ と一致し、 $SU(n)/SO(n)$ の極小部分多様体となる。

定理 5.15. $\tilde{f}^{-1}(1)$ は $SU(n)/SO(n)$ の全測地的部分多様体となる。

• $(Sp(n)/U(n), \mathbf{C}^n)$

補題 5.16. \mathbf{R}^3 に値をとる関数 F を以下のように定義する。

$$F := (|s|^2 - |t|^2, 2(s, t)).$$

このとき、 F は等径関数となる。ただし、 (s, t) は $U \rightarrow Sp(n)/U(n)$ と $V \rightarrow Sp(n)/U(n)$ との双対関係を利用した \mathbf{C} 値関数である。

さらに $\tilde{f} = |F|^2 = (|s|^2 - |t|^2)^2 + 4|(s, t)|^2$ と定める。

定理 5.17. \tilde{f} は対称空間 $Sp(n)/U(n)$ 上の等径関数となる。

$w \in W$ と \tilde{f} の関係を説明する。 ω を $W \cong \mathbf{C}^{2n}$ の不変シンプレクティック形式とする。 $Sp(n)$ 既約分解 $\wedge^2 \mathbf{C}^{2n} = \wedge_0^2 \mathbf{C}^{2n} \oplus \mathbf{C}\omega$ を考え、 $w \wedge jw \in \wedge^2 \mathbf{C}^{2n}$ の $\wedge_0^2 \mathbf{C}^{2n}$ 成分を \tilde{w} とおく。 $U(n)$ 表現として、 $\wedge_0^2 \mathbf{C}^{2n} = \wedge^2 \mathbf{C}^n \oplus \wedge^2 \mathbf{C}^{n*} \oplus \mathfrak{su}(n)^{\mathbf{C}}$ と既約分解されるので、 \tilde{w} が実構造で不変であることを考慮すれば、 \tilde{w} はベクトル束 $Sp(n) \times_{U(n)} (\wedge^2 \mathbf{C}^n \oplus \wedge^2 \mathbf{C}^{n*})^{\mathbf{R}}$ の切断 \tilde{s} を誘導する。このとき、

$$2|\tilde{s}|^2 = 4(|s|^2|t|^2 - |(s, t)|^2) = 1 - \left\{ (|s|^2 - |t|^2)^2 + 4|(s, t)|^2 \right\} = 1 - \tilde{f}$$

が成り立つ。 $w \wedge jw$ は $\tilde{H} := Sp(1) \times Sp(n-1)$ で不変であるので、次の結果が成立する。

補題 5.18. 等径関数 \tilde{f} は \tilde{H} の作用の下で不変である。

注意. $Sp(n)/U(n)$ はエルミート対称空間なので、 \tilde{H} の部分群 $Sp(1)$ 作用に対する運動量写像 $\mu : Sp(n)/U(n) \rightarrow \mathfrak{sp}(1)$ を考えることができる。この運動量写像が等径関数 F である。

\tilde{H} の $Sp(n)/U(n)$ への作用は余等質性 1 である。

補題 5.19. \tilde{f} の臨界点の集合は $\tilde{f}^{-1}(0)$ と $\tilde{f}^{-1}(1)$ からなる。

補題 5.20. $F^{-1}(0)$ は $\tilde{f}^{-1}(0)$ と一致し、 $Sp(n)/U(n)$ の極小部分多様体となる。

定理 5.21. $\tilde{f}^{-1}(1)$ は $Sp(n)/U(n)$ の全測地的部分多様体となる。

- $(Gr_4(\mathbf{R}^9), S_9)$

まずスピノ表現 S_9 の 2 次対称積 $S^2 S_9$ の既約分解を考える。

$$S^2 S_9 = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^9 \oplus \wedge^4 \mathbf{R}^9.$$

$\Pi : S^2 S_9 \rightarrow \mathbf{R}^9$ を直交射影とすれば、 $\text{Spin}(9)$ 同変写像 $\alpha : S_9 \rightarrow \mathbf{R}^9$ を

$$\alpha(w) = \Pi(w \otimes w)$$

と定義することができる。

また、 $\text{Spin}(4) \times \text{Spin}(5)$ 表現空間として、 $U_0 = S_4^+ \otimes S_5$, $V_0 = S_4^- \otimes S_5$ なので、既約分解

$$U_0 \otimes V_0 = \mathbf{R}^4 \otimes (\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^5 \oplus \mathfrak{so}(5))$$

を得る。そこで、直交射影 $\pi_0 : U_0 \otimes V_0 \rightarrow \mathbf{R}^4$ を利用して、同語反復束 $S \rightarrow Gr_4(\mathbf{R}^9)$ の切断 $\pi_0(s \otimes t)$ を得る。

このとき、 $\alpha(w)$ の誘導する切断が $\pi_0(s \otimes t)$ であることがわかる。これは \mathbf{R}^9 の元が誘導する同語反復束 $S \rightarrow Gr_4(\mathbf{R}^9)$ の切断であるから、 $(Gr_4(\mathbf{R}^9), \mathbf{R}^9)$ の場合に帰着され、次の結果を得る。

定理 5.22. $\tilde{f} := |\pi_0(s \otimes t)|^2$ は $\tilde{H} := \text{Spin}(8)$ の作用で不変な等径関数である。

なお、この場合も \mathbf{R}^2 値等径関数を得る。

補題 5.23. \mathbf{R}^2 に値をとる関数 F を以下のように定義する。

$$F := (|s|^2 - |t|^2, \tilde{f}).$$

このとき、 F は等径関数となる。

補題 5.24. $F^{-1}(0, \frac{1}{8}) = \tilde{f}^{-1}(\frac{1}{8})$ は $Gr_4(\mathbf{R}^9)$ の全測地的部分多様体となる。

注意. $F^{-1}(0, \frac{1}{8}) = \tilde{f}^{-1}(\frac{1}{8})$ から、次のよく知られた等質空間としての表示を得る。

$$\text{Spin}(7)/\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1) \cong Gr_3(\mathbf{R}^8).$$

6. ラドン変換

最後に二つのファイブレーション $\pi_1 : G \rightarrow H \backslash G$, $\pi_2 : G \rightarrow G/K$ を利用して、**ラドン変換** $R : C^\infty(G/K) \rightarrow C^\infty(H \backslash G)$ を以下のように定義する。すなわち、 $f \in C^\infty(G/K)$ に対して、 H の正規化された Haar 測度 $d\mu$ を利用して、 $R(f) \in C^\infty(H \backslash G)$ を

$$R(f)(x) = \int_{\pi_1^{-1}(\{x\})} \pi_2^* f d\mu$$

と定義する。

定理 6.1. H の G/K への作用が余等質次元 1 の場合には、 $|s|^2$ のラドン変換は球面 $S^{N-1} \subset W$ 上の主曲率が 2 種類の等径関数となる。

実際に、 W が実表現であるときには、

$$g^{-1}w = x_1e_1 + \cdots + x_Ne_N$$

という座標を用意すると、

$$R(\tilde{f}) = \frac{1}{N} \left\{ q \sum_{i=1}^p x_i^2 - p \sum_{\alpha=1}^q x_\alpha^2 \right\}$$

となる。

定理 6.2. $SU(n)/SO(n)$ ($n \geq 3$) 上の等径関数 \tilde{f} のラドン変換は、野水により定義された \mathbf{C}^n の単位球面上の等径関数となる。

定理 6.3. $Sp(n)/U(n)$ 上の等径関数 \tilde{f} のラドン変換は球面 $S^{4n-1} \subset \mathbf{C}^{2n}$ 上の主曲率が 4 種類の等径関数となる。

ここまでの例では、ラドン変換で得られた等径関数は球面内の等質な等径超曲面に対応する等径関数であるが、 $(Gr_4(\mathbf{R}^9), S_9)$ の場合には非等質な等径超曲面に対応する等径関数が得られる。この結果は [1], [10] を参照することにより示され、尾関 - 竹内により得られた等径関数であることがわかる。

定理 6.4. $Gr_4(\mathbf{R}^9)$ 上の等径関数 \tilde{f} のラドン変換は、スピン表現 S_9 内の単位球面 S^{15} 上の主曲率が 4 種類の等径関数となる。この等径超曲面は等質ではない。

REFERENCES

- [1] D.Ferus, H.Karcher and H.-F.Münzner, *Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen*, Math. Z. **177** (1981), 479-502
- [2] W.C Hsiang and W.Y. Hsiang, *Differential actions of compact connected classical groups: II*, Ann. of Math. **92** (1970), 189-223
- [3] W.Y.Hsiang and H.B.Lawson, *Minimal Submanifolds of Low Cohomogeneity*, J. Diff. Geom. **5** (1971), 1-38
- [4] S.Kobayashi, "Differential Geometry of Complex Vector Bundles", Iwanami Shoten and Princeton University Press, Tokyo (1987)
- [5] H.F.Münzner, *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären. I*, Math. Ann. **251** (1980), 57-71
- [6] Y.Nagatomo, *Twistor sections on the Wolf spaces*, Trans. A.M.S, **360**, (2008), 4497-4517
- [7] Y.Nagatomo, *Harmonic maps into Grassmannian manifolds*, a preprint
- [8] Y.Nagatomo and M.Takahashi, *Vector bundles, isoparametric functions and Radon transforms on symmetric spaces*, a preprint
- [9] K.Nomizu, *Some Results in E.Cartan's Theory of Isoparametric Families of Hypersurfaces*, Bull.A.M.S. **79** (1973), 1184-1188
- [10] H.Ozeki and M.Takeuchi, *On some types isoparametric hypersurfaces in spheres. I*, Tôhoku Math.J. **27** (1975), 515-559
- [11] R.Takagi and T.Takahashi, *On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a sphere*, Differential Geometry, in Honor of K.Yano, Kinokuniya, Tokyo (1972), 468-481

819-0395 福岡市西区元岡 744

E-mail address: nagatomo@math.kyushu-u.ac.jp